MATEMATIKA DISKRIT

Rasiman
Noviana Dini Rahmawati
Agnita Siska Pramasdyahsari

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat dan hidayahNya, sehingga kami bisa menyelesaikan penyusunan bahan ajar ini. Bahan ajar berjudul "MATEMATIKA DISKRIT".

Pengkajian tiap materi bahasan didasarkan pada satu atau lebih indikator. Urutan dalam pengkajian materi bahasan lebih dititik beratkan pada keterkaitan antar materi bahasan yang satu dengan materi bahasan yang berikutnya. Dengan urutan pengkajian materi bahasan semacam ini akan memudahkan dalam proses belajar. Tiap materi dalam bahan ajar ini disusun secara sistematis dengan mengelompokkan menjadi beberapa komponen yang saling berkaitan. Tujuannya adalah agar target pencapaian dalam kompetensi dasar dapat terpenuhi.

Kami menyadari sepenuhnya bahwa bahan ajar ini masih belum sempurna. Oleh karena itu kritik dan saran yang ada relevansinya dengan bahan ajar ini sangat kami harapkan. Kritik dan saran sekecil apapun akan kami perhatikan dan pertimbangkan guna penyempurnaan bahan ajar berikutnya.

Pada kesempatan kali ini kami mengucapkan terimakasih kepada seluruh pihak yang telah mendukung dan membantu dalam menyelesaikan bahan ajar ini ini. Semoga bahan ajar ini dapat memberikan manfaat dan memberikan nilai tambah kepada para pembaca khususnya bagi mahasiswa.

Semarang, Agustus 2018

Penyusun

TINJAUAN UMUM

A. Standar Kompetensi

Mahasiswa akan dapat menerapkan konsep-konsep dan teorema-teorema dalam kombinatorik, relasi rekursif, dan graph.

B. Kompetensi Dasar

1. Menerapkan Notasi faktorial
2. Menerapkan Notasi sigma
3. Menemukan dan menggunakan definisi fungsi pembangkit
4. Mengaitkan fungsi pembangkit dengan barisan tertentu
5. Menerapkan fungsi pembangkit dalam masalah kombinasi
6. Menerapkan fungsi pembangkit dalam masalah permutasi
7. Menemukan dan menggunakan definisi relasi rekursif
8. Penyelesaikan Relasi Rekursif dengan metode akar karakteristik
9. Penyelesaikan Relasi Rekursif dengan fungsi pembangkit
10. Pengantar Graph dan penerapannya
11. Pewarnaan

C. Tujuan

Setelah mempelajari materi ini, diharapkan mahasiswa dapat:

1. Menerapkan Notasi faktorial dalam menyelesaikan masalah kombinatorik.
2. Menemukan suatu barisan, jika fungsi pembangkitnya diketahui.
3. Menemukan fungsi pembangkit dalam bentuk sederhana, jika barisan yang terkait diketahui.
4. Menerapkan fungsi pembangkit untuk menyelesaikan masalah kombinasi.
5. Menerapkan fungsi pembangkit untuk menyelesaikan masalah permutasi.
6. Menemukan formulasi relasi rekursif dari suatu masalah matematika.

7. Menyelesaikan relasi rekursif dengan metode akar karakteristik.
8. Menyelesaikan relasi rekursif dengan fungsi pembangkit.
9. Menggambar representasi dari suatu graph dan sebaliknya.
10. Menentukan derajat suatu titik dalam graph yang diketahui.
11. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan derajat titik suatu graph.
12. Mengaitkan antara suatu graph dengan matriks tertentu.
13. Menentukan lintasan terpendek dari suatu permasalahan dalam masalah graph.
14. Menyelesaikan masalah yang terkait dengan pewarnaan dalam suatu graph.

D. Materi Prasyarat

1. Pengantar Dasar Matematika
2. Kalkulus Lanjut
3. Teori Peluang

E. Metode Pembelajaran

1. Ceramah
2. Diskusi
3. Pemberian Tugas

DAFTAR ISI

BAB V
PEWARNAAN PADA GRAPH

DAFTAR PUSTAKA

BAB I

PENDAHULUAN

Matematika diskrit merupakan cabang matematika yang banyak mempelajari tentang teori kombinatorik dan teori grap. Beberapa topik yang akan kita pelajari dalam teori kombinatorik antara lain fungsi pembangkit dan relasi rekursif, sedangkan untuk terminologi grap antara lain derajat titik, penyajian grap, mencari lintasan terpendek sebuah grap bobot dan pewarnaan grap.

1.1. Aturan Jumlah dan Kali

Definisi 1.1.1 (aturan jumlah):

Jika tugas jenis pertama dapat dilakukan dengan m cara, tugas jenis kedua dapat dilakukan dengan n cara, dan kedua jenis tugas itu tidak dapat dilakukan secara simultan, maka banyaknya cara untuk menyelesaikan tugas-tugas tersebut adalah $m+n$ cara.

Contoh 1.1.1:

Di dalam suatu laboratorium komputer ada 7 printer (merk) jenis laserjet dan 5 printer jenis deskjet. Jika seorang praktikan diperbolehkan menggunakan kedua jenis printer tersebut, maka ada 7+5 = 12 printer yang bisa dipilih untuk dipakai.

Contoh 1.1.2:

Aturan jumlah dapat diperluas untuk lebih dari dua tugas. Misalnya, seorang dosen matematika memiliki 3 jenis buku bahasa pemrograman: 5 buku (judul) tentang Matlab, 7 buku tentang SPSS, 8 buku tentang Pascal. Jika seorang mahasiswa dianjurkan untuk meminjam satu buku bahasa pemrograman dari sang dosen, maka ada 5 + 7 + 8 = 20 buku yang bisa dia pinjam.

Definisi 1.1.2 (aturan kali):

Jika suatu prosedur dapat dipecah menjadi dua tahap dan jika tahap pertama menghasilkan m keluaran yang mungkin dan masing-masing keluaran dilanjutkan ke tahap kedua dengan n keluaran yang mungkin, maka prosedur tersebut akan menghasilkan mn keluaran yang mungkin.

Contoh 1.1.3:

Pada contoh 1.1.2, jika seorang mahasiswa diwajibkan menguasai ketiga jenis bahasa pemrograman yang masing-masing diberi waktu satu bulan untuk mempelajarinya, maka ada $5\times 7\times 8 = 280$ cara belajar yang mungkin.

Dengan aturan kali, definisi berikut dengan mudah dapat dipahami.

Definisi 1.1.3:

Jika dalam suatu kotak berisi n obyek (benda) yang berbeda, maka banyaknya cara memilih (mengambil) r obyek dari kotak itu dengan urutan diperhatikan dan pengulangan (pengembalian) dibolehkan adalah n^r .

Ungkapan dari definisi di atas bisa diganti dengan: "banyaknya cara menempatkan n obyek yang berbeda ke dalam r posisi yang berbeda pula dengan pengulangan dibolehkan adalah n^r cara". Aturan jumlah dan kali merupakan pengertian dasar untuk memahami pembahasan selanjutnya yang berkenaan dengan kombinatorika.

1.2. Notasi Faktorial

Definisi 1.2.1:

Misalkan n bilangan bulat positif ($n \geq 0$), "n **faktorial** ", dinotasikan dengan $n!$**.**

Ditulis $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times ...\times 3\times 2\times 1$

Dalam hal ini didefinisikan, 0!= 1

Soal 1.2.1:

Hitunglah nilai dari:

1. $4!$ = ...
2. $\dfrac{12!}{10!2!}$ = ...
3. $\left(\dfrac{6}{2}\right)!$ = ...
4. $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!}$ = ...
5. $\dfrac{(n-5)!}{(n-3)!}$ = ...

Soal 1.2.2:

Tentukan nilai n yang memenuhi persamaan: $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$.

Soal 1.2.3:

Buktikan bahwa: $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} - \dfrac{1}{4!} = \dfrac{15}{4!}$.

1.3. Notasi Sigma: ” $\sum$ ”

Pandang jumlah 10 bilangan asli pertama,

1+2+3+4+5+6+7+8+9+10.

Bentuk di atas dapat di tulis dengan:

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=\sum_{i=1}^{10} i$

Yang dibaca “sigma i , untuk i dari 1 sampai dengan 10’’

Teorema 1.3.1:

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc, c \text{ konstanta}$$

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (ca_i + db_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i + d\sum_{i=1}^{n} b_i$$

Soal 1.3.1:

Tulis dengan menggunakan notasi sigma:

1. $a_1+a_2+a_3+...+a_n$ = ...
2. $1^2+2^2+3^2+...+(50)^2$ = ...
3. $\frac{1}{2.3+1}+\frac{1}{2.4+1}+\frac{1}{2.5+1}+...+\frac{1}{2.n+1}$ = ...
4. 2+4+6+8+10+12+14+16+18 = ...

Soal 1.3.2:

Hitunglah

a) $\sum_{i=1}^{6} 5$ = ...

b) $\sum_{i=1}^{5}\left(i^2+4i-5\right)$ = ...

c) $\sum_{i=2}^{4}\frac{(-1)^i}{i(2i+1)}$ = ...

1.4. Permutasi

Secara umum, jika ada n objek, dinotasikan $a_1, a_2, ..., a_n$ dan r bilangan bulat, dengan $1 \le r \le n$. Suatu susunan n objek yang berbeda dalam suatu himpunan yang ditempatkan ke dalam r posisi yang berbeda pula dengan cara pengulangan tidak dibolehkan disebut **’’permutasi’’**, dinotasikan dengan $P(n,r)$. Untuk $r=0$, $P(n,0)=1=\frac{n!}{(n-0)!}$.

Dengan demikian, diperoleh:

$$\boxed{P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!},\ 0\le r\le n}$$

<u>Definisi 1.4.1:</u>

Permutasi berukuran r dari n obyek dapat diartikan sebagai seleksi (pengambilan) sebanyak r dari kumpulan yang beranggota n obyek dengan urutan diperhatikan dan pengulangan (pengembalian) tidak dibolehkan.

Contoh 1.4.1:

Di dalam suatu kelas yang terdiri 15 mahasiswa, dipilih 4 orang untuk duduk di kursi barisan depan. Tentukan banyaknya susunan yang mungkin.

<u>Penyelesaian:</u>

Banyaknya susunan yang mungkin adalah

$$\begin{aligned}P(15,4)&=\frac{15!}{(15-4)!}\\&=\frac{15\times14\times13\times12\times11!}{11!}\\&=15\times14\times13\times12\\&=32760\end{aligned}$$

Contoh 1.4.2:

Banyaknya permutasi dari huruf dalam kata “COMPUTER” adalah 8!. Jika hanya 4 huruf yang digunakan, maka banyaknya permutasi adalah $P(8,4)=\frac{8!}{(8-4)!}=\frac{8!}{4!}=1680$.

Jika ada n objek dengan n_1 jenis pertama, n_2 jenis kedua,..., n_k jenis ke-k, dimana $n_1+n_2+...+n_k=n$.

Sehingga diperoleh:

$$\boxed{\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!....n_k!}}$$

Contoh 1.4.3:

Tentukan banyaknya kata yang mungkin dibentuk dengan mengambil semua huruf di dalam kata “MATEMATIKA”.

Penyelesaian:

banyaknya kata yang mungkin dibentuk dengan mengambil semua huruf di dalam kata “MATEMATIKA” (2M; 3A; 2T; 1E; 1I; dan 1K) adalah $\frac{10!}{2!3!2!1!1!1!}$

Contoh 1.4.4:

Jika 6 orang didudukkan mengelilingi meja melingkar, maka banyaknya susunan melingkar yang mungkin adalah $5\times4\times3\times2\times1=5!$

Secara umum, jelas bahwa banyaknya susunan melingkar berukuran n adalah $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

Contoh 1.4.5:

Pasang suami-istri didudukkan mengelilingi meja melingkar. Jika duduknya disyaratkan selang-seling laki-laki dan perempuan, tentukan banyaknya susunan yang mungkin.

Penyelesaian:

Format susunan melingkar dapat dipandang sebagai format susunan linear dengan membuat satu posisi tetap yang bebas dari pemilihan obyek, sedangkan posisi-posisi lainnya mengikuti pola susunan linear. Dalam kasus di contoh ini, ambil satu posisi tetap untuk satu orang dari 5 pasang suami istri tersebut. Selanjutnya, 9 posisi lainnya mengikuti pola susunan linear selang-seling, sehingga diperoleh rumusan: $5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = (5!)(4!)$

Soal 1.4.1:

Misalkan kita mempunyai tiga huruf a,b dan c. Tentukan banyaknya permutasi apabila diambil:

a) tiga huruf
b) dua huruf
c) satu huruf

Soal 1.4.2:

Diketahui enam buah angka bilangan bulat yaitu 1, 2, 3, 4, 5, dan 6. Berapa banyaknya susunan angka yang mungkin tejadi jika:

a) keenam angka disusun sembarang
b) susunan keenam angka itu dapat dibagi dua.

Soal 1.4.3:

Berapa banyak jadwal yang dapat disusun suatu cabang Himpunan Matematika Indonesia untuk tiga penceramah dalam tiga pertemuan bila ketiganya bersedia berceramah tiap hari selama lima hari?

Soal 1.4.4:

Berapa banyak cara untuk menampung tujuh tamu dalam tiga kamar hotel, bila satu kamar mempunyai tiga tempat tidur, sedangkan dua kamar lainnya mempunyai dua tempat tidur?

Soal 1.4.5:

Tentukan nilai n sehingga:

1. $P(n,2)=90$
2. $P(n,3)=3P(n,2)$
3. $2P(n,2)+50=P(2n,2)$

1.5. Kombinasi

Dalam kehidupan sehari- hari kita sering dihadapkan pada suatu masalah memilih r buah objek dari n buah objek yang tersedia $(r \leq n)$ tanpa memperhatikan urutannya. Pemilihan seperti ini disebut ''kombinasi'' dari n buah objek setiap kali diambil r buah objek dan dinotasikan:

$$\boxed{C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!.(n-r)!}}$$

Contoh 1.5.1:

Dalam ujian akhir semester Matematika Diskret diberikan 10 soal. Tentukan banyaknya cara mengerjakan soal jika:

1. seorang mahasiswa di wajibkan hanya mengerjakan 8 soal.
2. mahasiswa yang bersangkutan diwajibkan memilih 3 soal dari 4 nomor soal pertama dan memilih 5 soal dari 6 nomor soal terakhir.
3. dari 8 soal yang dikerjakan mahasiswa tersebut, dipilih sedikitnya 3 soal dari 4 nomor soal pertama dan sisanya diambil dari 6 nomor soal terakhir.

<u>Penyelesaian:</u>

1. Banyaknya cara mengerjakan 8 soal dari 10 soal adalah $\binom{10}{8} = \frac{10!}{(10-8)!8!}$

2. Banyaknya cara mengerjakan 3 soal dari 4 soal pertama adalah $\binom{4}{3}$ dan banyaknya cara mengerjakan 5 soal dari 6 soal terakhir adalah $\binom{6}{5}$. Secara keseluruhan proses mengikuti aturan kali, sehingga ada $\binom{4}{3}$ x $\binom{6}{5}$ cara mengerjakan soal.

3. Mengerjakan sedikitnya 3 soal dari 4 nomor soal pertama dan sisanya diambil dari 6 nomor soal terakhir mempunyai dua alternatif pengerjaan:

   (a) 3 soal dari 4 nomor soal pertama dan 5 soal dari 6 nomor soal terakhir, berarti ada $\binom{4}{3} \times \binom{6}{5}$ cara pengerjaan.

   (b) 4 soal dari 4 nomor soal pertama dan 4 soal dari 6 nomor soal terakhir, berarti ada $\binom{4}{4} \times \binom{6}{4}$ cara pengerjaan.

Selanjutnya, secara keseluruhan mengikuti aturan jumlah, berarti ada $\binom{4}{3}\times\binom{6}{5}$ + $\binom{4}{4}\times\binom{6}{4}$ cara pengerjaan soal.

Soal 1.5.1:

Tentukan banyaknya cara memilih 3 orang calon anggota pengurus sebuah koperasi dari 4 orang yang memenuhi syarat.

Soal 1.5.2:

Dari 10 orang anggota, suatu himpunan akan dipilih 4 orang.

a) Dengan beberapa cara dapat dilakukan pemilihan itu.
b) Dengan berapa cara pula jika salah seorang selalu terpilih.

Soal 1.5.3:

Dari 6 pelamar pria dan 5 pelamar wanita akan diterima hanya 4 orang pelamar. Dengan berapa cara penerimaan pelamar dapat dilakukan, jika sekurang-kurangnya ada seorang wanita dari keempat pelamar.

Soal 1.5.4:

Bila ada empat kimiawan dan tiga fisikawan, carilah banyaknya panitia tiga orang yang dapat dibuat yang beranggotakan dua kimiawan dan satu fisikawan.

1.6. TEOREMA BINOMIAL

Kita sudah mengenal bilangan segitiga pascal, sebagai berikut:

1 1

1 2 1

1   3   3   1

1   4   6   4   1

1   5   10   10   5   1

dst.

Bilangan-bilangan tersebut dapat digunakan untuk menentukan koefisien binomial. Misalnya :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

koefisien a^2, ab dan b^2 bersesuain dengan bilangan pada segitiga pascal   1   2   1

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

koefisien a^3, a^2b, ab^2 dan b^3 bersesuaian dengan bilangan pada segitigas pascal 1 3 3 1.

Pada materi SMA kita juga sudah mengenal kombinasi r unsur yang diambil dari n unsur yang berbeda, didefinisikan sebagai berikut:

$$\boxed{C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}}$$

Bila dikorespondesikan bilangan pada segitiga pascal dengan kombinasi sebagai berikut:

$$1 = C_0^1$$

$$1 = C_0^2 \quad 2 = C_1^2 \quad 1 = C_2^2$$

$$1 = C_0^3 \quad 3 = C_1^3 \quad 3 = C_2^3 \quad 1 = C_3^3$$

$$1 = C_0^4 \quad 4 = C_1^4 \quad 6 = C_2^4 \quad 4 = C_3^4 \quad 1 = C_4^4$$

$$1 = C_0^5 \quad 5 = C_1^5 \quad 10 = C_2^5 \quad 10 = C_3^5 \quad 5 = C_4^5 \quad 1 = C_5^5$$

dst

Sehingga kita dengan mudah dapat menentukan koefisien binomial

$(a + b)^5 = C_0^5 a^5 + C_1^5 a^4 b + C_2^5 a^3 b^2 + C_3^5 a^2 b^3 + C_4^5 ab^4 + C_5^5 b^5$

$= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$

atau bila berderajat n dapat dinyatakan dengan teorema berikut.

Teorema 1.6.1 (teorema binomial)

Bilangan C_k^n merupakan koefisien binomial, yaitu untuk n = 1, 2, 3,..., berlaku :

$(a + b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + C_n^n b^n$

$$= \sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r$$

Bukti:

Dengan menggunakan induksi matematika

Tulis P(n) : $(a + b)^n$, akan dibuktikan P(n) benar $\forall n \in N$

(i) untuk n = 1 , P(1) = $(a + b)^1 = a + b$ benar

Jadi P(1) benar

(ii) Andaikan untuk n = k, P(k) benar, yaitu

P(k) = $(a + b)^k = \sum_{r=0}^{k} C_r^k a^{k-r} b^r$, akan dibuktikan benar untuk n = k+1, yaitu :

P(k + 1) = $(a + b)^{k+1} = (a + b)(a + b)^k$

$$= (a + b) \sum_{r=0}^{k} C_r^k a^{k-r} b^r$$

$$= \sum_{r=0}^{k} C_r^k a^{k+1-r} b^r + \sum_{r=0}^{k} C_r^k a^{k-r} b^{r+1}$$

$$= C_0^k a^{k+1} + C_1^k a^k b + C_2^k a^{k-1} b^2 + \ldots + C_k^k ab^k + C_0^k a^k b + C_1^k a^{k-1} b^2 + \ldots + C_{k-1}^k ab^k + C_k^k b^{k+1}$$

$$= \sum_{r=0}^{k+1} C_r^{k+1} a^{k+1-r} b^r$$

Jadi P(k+1) benar.

Dari (i) dan (ii) dapat disimpulkan P(n) benar.

Jadi $(a + b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \ldots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + C_n^n b^n$

$$= \sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r$$

Dengan teorema di atas dapat diperoleh:

$(1 + x)^n = C_0^n 1^n + C_1^n 1^{n-1}x + C_2^n 1^{n-2}x^2 + \ldots\ldots + C_{n-1}^n 1x^{n-1} + C_n^n x^n$

$$= C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \ldots\ldots + C_{n-1}^n x^{n-1} + C_n^n x^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^k$$

Teorema Binomial yang diperluas

Untuk bilangan real n, bilangan non negatif k, dan $|X| < 1$, berlaku:

$$\boxed{(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^n x^k ,}$$

Contoh 1.6.1:

(a + b)^7 $= \sum_{i=0}^{7} C_{ik}^{7} a^{7-k} b^{k}$ =

$C_0^7 a^7 b^0 + C_1^7 a^6 b + C_2^7 a^5 b^2 + C_3^7 a^4 b^3 + C_4^7 a^3 b^4 + C_5^7 a^2 b^5 + C_6^7 a^1 b^6 + C_7^7 a^0 b^7$

$= 1a^7 b^0 + 7a^6 b^1 + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 +$

$21a^2 b^5 + 7a^1 b^6 + 1a^0 b^7$

$= a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7ab^6 + b^7$

Contoh 1.6.2:

(2x – 3y)^5 $= \sum_{i=0}^{5} C_{ik}^{5} (2x)^{5-k} (3y)^{k}$

$= C_0^5 (2x)^5 (3y)^0 + C_1^5 (2x)^4 (3y) + C_2^5 (2x)^3 (3y)^2 + C_3^5 (2x)^2 (3y)^3 +$

$C_4^5 (2x)^1 (3y)^4 + C_5^5 (2x)^0 (3y)^5$

$= 1(2x)^5 (3y)^0 + 5(2x)^4 (3y)^1 + 10(2x)^3 (3y)^2 + 10(2x)^2 (3y)^3$

$5(2x)^1 (3y)^4 + (2x)^0 (3y)^5$

$= 2x^5 + 30x^4 y + 60x^3 y^2 + 60x^2 y^3 + 30x^1 y^4 + 3y^5$

Contoh 1.6.3:

Tentukan koefisien dari $x^5 y^2$ di dalam ekspansi $(2x - 3y)^7$.

<u>Penyelesaian:</u>

$$(2x-3y)^7 = \left[(2x) + (-3y)\right]^7$$

$$= \sum_{i=0}^{7} \binom{7}{i} (2x)^i (-3y)^{7-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{7} \left[\binom{7}{i} (2)^i (-3)^{7-i}\right] x^i y^{7-i}$$

Dengan demikian koefisien dari x^5y^2 adalah (yaitu untuk $i=5$)

$$\binom{7}{5}\left(2^5\right)\left(-3\right)^2.$$

<u>Teorema 1.6.2 (Teorema Multinomial)</u>

Untuk intejer positif n dan t; koefisien dari $x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}...x_t^{n_t}$ dalam ekspansi $\left(x_1+x_2+...+x_t\right)^n$ adalah $\dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_t!}$ dan dinotasikan dengan $\dbinom{n}{n_1,n_2,...,n_t}$.

<u>Bukti:</u>

Banyaknya suku $x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}...x_t^{n_t}$ dalam ekspansi $\left(x_1+x_2+...+x_t\right)^n$ adalah banyaknya cara memilih secara berurutan n_1 faktor, n_2 faktor,..., dan n_t faktor dari n faktor $\left(x_1+x_2+...+x_t\right)$, yaitu:

$$\binom{n}{n_1}\times\binom{n-n_1}{n_2}\times\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\times...\times\binom{n-\left(n_1+n_2+...+n_{t-1}\right)=n_t}{n_t}=$$

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_t!}$$

dan merupakan koefisien dari suku $x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}...x_t^{n_t}$ dalam ekspansi $\left(x_1+x_2+...+x_t\right)^n$.

Contoh 1.6.4:

Tentukan koefisien dari $a^2b^3c^2d^5$ dalam ekspansi $\left(a+2b-3c+2d+5\right)^{16}$.

<u>Penyelesaian:</u>

Berdasarkan Teorema Multinomial, maka $\frac{16!}{(2!)(3!)(2!)(5!)(4!)}$ adalah koefisien dari $(a)^2(2b)^3(-3c)^2(2d)^5(5)^4$. Dengan demikian,

$\frac{16!}{(2!)(3!)(2!)(5!)(4!)}(1)^2(2)^3(-3)^2(2)^5(5)^4$ adalah koefisien dari $a^2b^3c^2d^5$.

Soal 1.6.1:

Tentukan koefisien dari x^9y^3 di dalam ekspansi:

1. $(x+y)^{12}$
2. $(2x-3y)^{12}$

Soal 1.6.2:

Tentukan koefisien dari:

1. xyz^2 di dalam $(w+x+y+z)^4$
2. xyz^2 di dalam $(2x-y-z)^4$

BAB II

FUNGSI PEMBANGKIT

2.1 Pengantar

Dalam mata kuliah Kalkulus, pernah dibahas tentang beberapa deret antara lain:

a. Deret Kuasa, yang mempunyai bentuk umum:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

b. Deret Taylor, yang mempunyai bentuk umum:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^n(0) \frac{1}{n!} x^n \quad = 1 + f^1(0)\frac{1}{1!}x + f^2(0)\frac{1}{2!}x^2 + f^3(0)\frac{1}{3!}x^3 + \ldots$$

Jika dalam membahas materi deret pada umumnya mencari jumlah n-suku maupun menentukan suku ke-n. Namun pada matematika diskrit yang menjadi fokus pembicaraan adalah koefesien-koefesien suku-suku deret tersebut.

Dengan melakukan modifikasi dan operasi aljabar, maka dapat diperoleh beberapa formula sebagai berikut.

1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$,untuk $|x| < \infty$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$$

2) $e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$,untuk $|x| < \infty$

3) $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ untuk $|x| < 1$

4) $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots$,untuk $|x| < 1$

5) $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ untuk $|x| < 1$

6) $\dfrac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots$ untuk $|x| < 1$

7) $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$, untuk $|x| < 1$

8) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots$

9) $\ln(1-x) = -\dfrac{x}{1} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} - \ldots$

10) $\sin x = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots$

11) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots$

12) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots$

13) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{x}{1!} + \dfrac{1x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots$

14) $\dfrac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} x^k$

15) $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$

16) Teorema Binomial

Untuk bilangan real n, bilangan non negatif k, dan $|x|$ < 1 berlaku:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k ,\qquad \text{dimana:}$$

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} & jika\ k>0 \\ 1 & jika\ k=0 \end{cases}$$

2.2 Definisi Fungsi Pembangkit

Pandang $(a_n) = (a_0, a_1, a_2, ...)$ suatu barisan,

Fungsi Pembangkit Biasa (FPB) dari barisan (a_n) didefinisikan sebagai:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...$$

Fungsi Pembangkit Eksponensial (FPE) dari barisan (a_n) didefinisikan sebagai:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + ...$$

Misalnya,

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + ...$$

adalah fungsi pembangkit biasa dari barisan (1, 1, $\frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, ...$) atau fungsi pembangkit eksponensial dari barisan (1, 1, 1, 1,...)

Bila diberikan suatu barisan, maka kita sering diminta untuk menuliskan fungsi pembangkit dari barisan tersebut dalam bentuk sesederhana mungkin.

Contoh 2.2.1:

Tulis bentuk sederhana fungsi pembangkit biasa dari barisan – barisan berikut : (a) ($0, 0, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, ...$)

(b) (0, 2, 4, 6, ...2n,...)

Penyelesaian :

(a) Fungsi pembangkit dari barisan yang dimaksud adalah :

P (x) = $0 + 0.x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + ...$

$= (1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + ...) - x - 1$

$= e^x - x - 1$

(b) Fungsi pembangkit yang dimaksud ialah :

P (x) = $2x + 4x^2 + 6x^3 + ... + 2nx^n + ...$

$= 2x\left(1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} + ...\right)$

Untuk $|x| < 1$, diperoleh

P (x) = $\frac{2x}{(1-x)^2}$

Contoh 2.2.2:

Diketahui suatu FPB, P(x) = 2 + 3x^2 + $\frac{2}{(1-4x)}$. Tentukan barisan (a_n) yang terkait dengan FPB tersebut.

Penyelesaian:

P(x) = 2 + 3x^2 + $\frac{2}{(1-4x)}$

= 2 + 3x^2 + $2\frac{1}{(1-4x)}$

= 2 + 3x^2 + $2\sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n$

$= 2 + 3x^2 + \ 2\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$

$= 2 + 3x^2 + 2\ (4^0 + 4x + 16x^2 + 64x^3 + \sum_{n=4}^{\infty}(4x)^n\ )$

$= 4 + 8x + 35x^2 + 128x^3 + 2\sum_{n=4}^{\infty}(4x)^n$

Jadi barisan (a_n) = 4, 8, 35, 128, ...$2(4)^n$

Contoh 2.2.3:

Diketahui suatu FPE, $P(x) = \ 3x\ (\frac{1}{(1-3x)})$ Tentukan barisan (a_n) yang terkait dengan FPE tersebut.

<u>Penyelesaian:</u>

$P(x) = \ 3x\ (\frac{1}{(1-3x)})$

$= 3x\ (\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n\ )$

$= 3x\ (\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^n\ )$

$= 3x\ (1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \ldots.)$

$= 3x + 9x^2 + 27x^3 + 81x^4 + \ldots.$

Jadi barisan (a_n) = 0, 3, 9(2!), 27(3!), 81(4!), ...

= 0, 3, 18, 162, 1944, ...

Contoh 2.2.4

Diketahui suatu FPB, P(x) = e^{2x} + ($\frac{1}{(1-3x)}$) Tentukan barisan (a_n) yang terkait dengan FPB tersebut.

Penyelesaian:

P(x) = e^{2x} + ($\frac{1}{(1-3x)}$)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(2x)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{n!}(2x)^n + (3x)^n)$$

$$= 2 + 5x + 11x^2 + \frac{85}{3}x^3 + ...$$

Jadi barisan (a_n) = 2, 5, 11, $\frac{85}{3}$, ...

Contoh 2.2.5

Diketahui suatu FPB, P(x) = e^{-3x} ($\frac{1}{(1+2x)}$) Tentukan barisan (c_n) yang terkait dengan FPB tersebut.

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan soal tersebut, digunakan rumus Konvolusi sebagai berikut:

Jika $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *dan* $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, *maka*

$$A(x) \pm B(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$$

$$A(x).B(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n$$

Apabila $(a_n),(b_n)\, dan (c_n)$ adalah barisan sedemikian hingga $c_n=\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$, maka kita katakan (c_n) adalah konvolusi dari (a_n) dan (b_n), yang ditulis $(c_n)=(a_n)*(b_n)$.

Penyelesaian:

Misal P(x) = e^{-3x} ($\frac{1}{(1+2x)}$) = $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$e^{-3x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-3x)^n\ x$$
$$=x-3x^2+\frac{9}{2}x^3-\frac{27}{6}x^4+....$$

fungsi pembangkit biasa dari barisan (a_n)=$(1,-3,\frac{9}{2},-\frac{27}{6},...)$

$$\frac{1}{(1+2x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n$$
$$=1-2x+4x^2-8x^3+....$$

fungsi pembangkit biasa dari barisan (b_n)=(1,-2,4,-8,...)

diperoleh $c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Dengan demikian (c_n) = $\left(1,-5,\frac{29}{2},-\frac{67}{2},...\right)$

<u>Soal</u>*:*

1) Tulis FPB dari barisan- barisan berikut.
   a) $(0,0,0,1,1,1,1,...)$
   b) $(0,0,\frac{1}{2!},\frac{1}{3!},\frac{1}{4!}...)$
   c) $(0,1,0,1,0,1,...)$
2) Tulis FPE dari barisan berikut.

a) $(3,3,3,3,...)$

b) $(0,1,0,1,0,1,...)$

3) P(x) adalah FPB dari barisan (a_n). Carilah barisan (a_n).

a) P(x)= 1+ $\frac{1}{1-x}$

b) P(x)= $\frac{2}{1-x}+3x^2+6x+1$

c) P(x)= $\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$

d) P(x)= $2x+e^{-x}$

4) Tulis Barisan (a_n), jika FPE adalah sebagai berikut.

a) P(x)= $5+5x+5x^2+5x^3$

b) P(x)= $\frac{1}{1-4x}$

c) P(x) = e^x+e^{3x}

5) Cari konvolusi dari pasang barisan berikut.

a) (1,1,1,1,..) dan (0,1,2,3,...)

b) (1,1,1,0,0,...) dan (0,1,2,3,...)

c) (1,1,1,1,...) dan (1,1,1,1,...)

6) Carilah a_n jika P(x) = $\frac{1+x+x^2+x^3}{1-x}$ adalah fungsi pembangkit biasa dari barisan (a_n).

2.3 <u>Fungsi Pembangkit Untuk Kombinasi</u>

Permasalahan:

Ada berapa cara, jika ada tiga objek a, b, dan c, diambil k objek dengan ketentuan bahwa a terambil maksimum 1, b terambil maksimum 2, dan c terambil maksimum 1.

<u>Penyelesaian</u>:

Permasalahan tersebut dapat ditulis menjadi :

$$\left[(ax)^0+(ax)^1\right]\left[(bx)^0+(bx)^1+(bx)^2\right]\left[(cx)^0+(cx)^1\right]$$

= $\left(a^0x^0 + a^1x^1\right)\left(b^0x^0 + b^1x^1 + b^2x^2\right)\left(c^0x^0 + c^1x^1\right)$

= $(1+ax)\left(1+bx+b^2x^2\right)(1+cx)$

= 1+ $(a+b+c)x + \left(ab+ac+bc+b^2\right)x^2 + \left(abc+ab^2+b^2c\right)x^3 + ab^2cx^4$

Misalkan untuk 2 huruf, maka perhatikan koefisien dari x^2, yaitu ab, ac, bc, dan bb, sehingga terdapat 4 cara. Ini berarti,

$(a+b+c)x$	Menyatakan 3 cara untuk 1 huruf
$\left(ab+ac+bc+b^2\right)x^2$	Menyatakan 4 cara untuk 2 huruf
$\left(abc+ab^2+b^2c\right)x^3$	Menyatakan 3 cara untuk 3 huruf
ab^2cx^4	Menyatakan 1 cara untuk 4 huruf

Permasalahan tersebut dapat dicari dengan menggunakan FPB. FPB dari permasalahan tersebut adalah:

P(x)= $(1+x)\left(1+x+x^2\right)(1+x)$

= $1+3x+4x^2+3x^3+x^4$

Dari P(x) tersebut, pangkat dari x menyatakan banyaknya huruf sedangkan koefisien dari masing- masing suku menyatakan banyaknya cara. Misalnya untuk $4x^2$, maka untuk 2 huruf ada 4 cara.

Secara umum diperoleh:

Misalkan terdapat p tipe obyek dan terdapat n_1 obyek tipe 1, n_2 obyek tipe 2,..., n_p obyek tipe p. Misal t_k menyatakan banyaknya cara mengambil k obyek dimana dibolehkan mengambil sembarang banyak obyek tiap tipe. Fungsi pembangkit untuk t_k adalah $P(x) = \sum t_k x^k$, dimana:

$$P(x)=\left(1+x+x^2+\ldots+x^{n_1}\right)\left(1+x+x^2+\ldots+x^{n_2}\right)\ldots\left(1+x+x^2+\ldots+x^{n_p}\right).$$

Bilangan t_k diberikan oleh koefisien x^k dalam $P(x)$.

Contoh 2.3.1

Tentukan fungsi pembangkit untuk banyaknya cara memilih r obyek dari n obyek dimana pengulangan tidak diperkenankan.

Penyelesaian:

Terdapat n obyek. Karena pengulangan tidak diperkenankan, maka tiap obyek dapat dipilih 0 atau 1 kali saja. Dengan demikian, fungsi pembangkit yang diminta adalah

$$P(x)=\underbrace{(1+x)(1+x)(1+x)\ldots(1+x)}_{n\ \ faktor}$$

$$P(x)=(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r \qquad \text{(binomial teorema)}$$

Catatan: koefisien x^r dalam $P(x)$ yaitu $\binom{n}{r}$ menyatakan banyaknya cara memilih (tanpa pengulangan) r obyek dari n obyek yang ada.

Contoh 2.3.2:

Tentukan banyaknya cara memilih r obyek dari n macam obyek dimana pengulangan diperkenankan.

Penyelesaian:

Misal t_r menyatakan banyak cara memilih r obyek. Karena ada n macam obyek dan tiap obyek dapat dipilih berulang (tanpa batas), maka fungsi pembangkit untuk t_r ialah :

$$P(x) = \underbrace{\left(1 + x + x^2 + \ldots\right)\left(1 + x + x^2 + \ldots\right)\ldots\left(1 + x + x^2 + \ldots\right)}_{n \;\; faktor}$$

$$= \left(1 + x + x^2 + \ldots\right)^n$$

Karena, untuk $|x| < 1,\; \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots.$

$$P(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n$$

Maka, $\quad = (1-x)^{-n}$ (binomial teorema)

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-1)^r \, x^r$$

Untuk $r > 0$ koefisien x^r dalam $P(x)$ adalah ...

$$\binom{-n}{r}(-1)^r = \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-r+1)}{r!}(-1)^r$$

$$= \frac{n(n+1)\ldots(n+r-1)}{r!}$$

$$= \frac{(n+r-1)(n+r-2)\ldots(n+1)n}{r!}$$

$$= \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r}$$

Untuk $r = 0$ koefisien x^r dalam $P(x)$ adalah ...

$$\binom{-n}{0}(-1)^0 = \binom{n+0-1}{0}$$

Sehingga, untuk $r \geq 0$

$$\binom{-n}{r}(-1)^r = \binom{n+r-1}{r}$$

Dengan demikian,

$$P(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}x^r$$

Jadi, banyaknya cara memilih r obyek dari n macam obyek dimana perulangan diperkenankan, sama dengan koefisien x^r dalam $P(x)$ yaitu $t_r=\binom{n+r-1}{r}$

Sebelum membicarakan contoh selanjutnya, perlu diingat bahwa untuk $x\neq 1$ dan n bilangan cacah berlaku identitas berikut:

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...+x^n.$$

Contoh 2.3.3:

Ada berapa cara mengambil k huruf dari huruf-huruf pembentuk kata SURABAYA sedemikian hingga setiap konsonan terpilih paling sedikit satu dan setiap vokal terpilih paling banyak 10?

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa kata SURABAYA terdapat enam huruf yang berbeda, yaitu 4 konsonan dan 2 vokal. Karena setiap konsonan terpilih paling sedikit satu, maka setiap konsonan tersebut berasosiasi dengan sebuah faktor $\left(x+x^2+x^3+...\right)$ dalam fungsi pembangkit. Selanjutnya, karena setiap vokal dapat dipilih sebanyak-banyaknya 10, maka setiap vokal tersebut berasosiasi dengan sebuah faktor $\left(1+x+x^2+...+x^{10}\right)$. Dengan demikian, fungsi pembangkit dari permasalahan di atas adalah:

$$P(x) = \left(x + x^2 + x^3 + \ldots\right)^4 \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{10}\right)^2$$
$$= \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)^4 \left(\frac{1-x^{11}}{1-x}\right)^2$$
$$= x^4 \left(1 - x^{11}\right)^2 (1-x)^{-6}$$
$$= \left(x^4 - 2x^{15} + x^{26}\right)(1-x)^{-6}$$
$$= \left(x^4 - 2x^{15} + x^{26}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \binom{6+r-1}{r} x^r$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{6+r-1}{r} x^{r+4} - 2\sum_{r=0}^{\infty} \binom{6+r-1}{r} x^{r+15} + \sum_{r=0}^{\infty} \binom{6+r-1}{r} x^{r+26}$$

Banyaknya cara yang dimaksud = koefisien x^k dalam $P(x)$

$$\begin{cases} 0 & , jika\, k < 4 \\ \binom{k+1}{k-4} & , jika\, 4 \le k \le 14 \\ \binom{k+1}{k-4} - 2\binom{k-10}{k-15} & , jika\, 15 \le k \le 25 \\ \binom{k+1}{k-4} - 2\binom{k-10}{k-15} + \binom{k-21}{k-26} & , jika\, k \ge 26 \end{cases}$$

Catatan: Dari contoh 1, 2 dan 3 dapat kita lihat bahwa fungsi pembangkit tidak tergantung dari banyaknya obyek yang diambil.

Fungsi pembangkit biasa dapat digunakan untuk memecahkan masalah pendistribusian (penempatan) obyek-obyek yang identik ke dalam sel-sel (kotak-kotak) yang berbeda.

Contoh 2.3.4:

Dengan beberapa cara 60 obyek yang identik dapat ditempatkan di dalam 4 sel (kotak) yang berbeda sedemikian hingga:

(i) Setiap kotak mendapat paling sedikit satu obyek

(ii) Setiap sel (kotak) mendapat paling sedikit 10 obyek dan tak lebih dari 20 obyek

<u>Penyelesaian</u>:

(i) Karena ada 4 kotak dan tiap kotak mendapat paling sedikit satu obyek, maka fungsi pembangkit untuk permasalahan ini adalah:

$$\begin{aligned}P(x) &= \left(x + x^2 + x^3 + \ldots\right)^4 \\ &= x^4\left(1 + x + x^2 + \ldots\right)^4 \\ &= x^4\left(\frac{1}{1-x}\right)^4 \\ &= x^4\sum_{r=0}^{\infty}\binom{4+r-1}{r}x^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{3+r}{r}x^{r+4}\end{aligned}$$

Jadi banyaknya cara menempatkan 60 obyek yang identik ke dalam 4 kotak yang berbeda sedemikian hingga tiap kotak mendapat paling sedikit satu obyek = koefisien x^{60} dalam $P(x)$

$$= \binom{56+3}{56} = \binom{59}{56} = 32.509$$

(ii) Karena ada 4 sel berbeda dan setiap sel mendapat paling sedikit 10 obyek dan tak lebih dari 20 obyek, maka fungsi pembangkit untuk persoalan ini adalah:

$$\begin{aligned}P(x) &= \left(x^{10} + x^{11} + \ldots + x^{20}\right)^4 \\ &= x^{40}\left(1 + x + \ldots + x^{10}\right)^4 \\ &= x^{40}\left(\frac{1-x^{11}}{1-x}\right)^4 \\ &= x^{40}\left(1-x^{11}\right)^4\left(1-x\right)^{-4} \\ &= x^{40}\sum_{s=0}^{4}(-1)^s\binom{4}{s}x^{11s}\ \sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+3}{r}x^r\end{aligned}$$

Kita cari s dan r :

$$40+11s+r=60$$

Penyelesaian bulat tidak negatif dari persamaan ini adalah:

$$s=1\ dan\ \ r=9;\ atau\ s=0\ dan\ r=20$$

Sehingga,

Banyaknya cara yang dimaksud = koefisien dari x^{60} dalam $P(x)$

$$= \binom{4}{0}\binom{20+3}{20}+(-1)\binom{4}{1}\binom{9+3}{9}$$

$$= 1771-880=891$$

Fungsi pembangkit biasa juga dapat digunakan untuk menentukan banyaknya penyelesaian (solusi) bulat dari suatu persamaan linear dengan beberapa peubah.

Contoh 2.3.5:

Tentukan banyaknya solusi bulat dari persamaan berikut $x_1+x_2+x_3=50$, $x_i \geq 0, \forall i \in \{1,2,3\}$

Jawab:

FPB dari permasalahan tersebut adalah

$$P(x) = (1+x+x^2+\ \ ...)^3$$

$$= \frac{1}{(\ 1-x\ )^3}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} 3+k-1 \\ k \end{bmatrix} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} 2+k \\ k \end{bmatrix} x^k$$

Jadi banyaknya solusi bulat yang di maksud adalah

= koefisien x^{50} dalam P(x)

= $\binom{2+50}{50}$ = $\binom{52}{50}$ =1326

Soal:

1) Tentukan banyak cara memilih k huruf dari huruf- huruf C,A,N,T,I,K sedemikian hingga:
   a) memuat paling sedikit satu C
   b) memuat tepat satu C dan paling banyak 5A
2) Tentukan banyaknya cara solusi bulat dari persamaan berikut:
   a) $x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_i \geq 3, \ \forall i \in \{1, 2, 3\}$
   b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 80, \ 1 \leq x_i \leq 30, \ \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$
3) Ada berapa cara untuk menentukan 50 koin yang sama ke dalam 5 kotak yang berbeda sedemikian sehingga:
   a) tidak ada kotak yang kosong
   b) setiap kotak mendapat paling sedikit 5 dan paling banyak 15 koin

2.4 Fungsi pembangkit untuk Permutasi

Permasalahan

- Bentuklah kata sandi yang panjangnya 3 huruf dengan syarat : $(a \leq 2, b \leq 2, c \leq 1)$
- Masalah tersebut bila diselesaikan dengan menggunakan FPB akan diperoleh koefisien x^3 hanya 5 suku (mengapa?), padahal ada 18 permutasi.
- 18 permutasi tersebut adalah sebagai berikut.

  aab,aac,bba,bbc,abc,bca

  aba,aca,bab, bcb,acb,cab

  caa,baa,abb,cbb,bac,cba

- Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut digunakan FPE. Kalau banyak hurufnya 3, maka yang di perhatikan adalah koefisien dari $\frac{x^3}{3!}$

Fungsi pembangkit untuk permasalahan di atas adalah sebagai berikut:

$$P(x) = \left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}\right)$$

$$=1+1!\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!}\right)\frac{x}{1!}+2!\left(\frac{1}{1!1!}+\frac{1}{1!1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{1!1!}\right)\frac{x^2}{2!}+ \qquad 3!$$

$$\left(\frac{1}{2!1!}+\frac{1}{2!1!}+\frac{1}{1!2!}+\frac{1}{2!1!}+\frac{1}{1!1!1!}\right)\frac{x^3}{3!}+4!\left(\frac{1}{1!2!1!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{2!1!1!}\right)\frac{x^4}{4!}+5!\left(\frac{1}{2!2!1!}\right)\frac{x^5}{5!}.$$

Jadi banyaknya kata sandi dengan panjang 3 yang memenuhi syarat tersebut = koefisien $\frac{x^3}{3!}$ dalam P(x)

$$= 3!\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)$$

$$= 18$$

Proposisi 2.4.1

Misal terdapat p macam (tipe) obyek dengan n_i obyek tipe i untuk $1 \le i \le p$. Maka banyaknya permutasi dengan panjang k dengan paling banyak n_i obyek tipe i sama dengan koefisien $\frac{x^k}{k!}$ dalam fungsi pembangkit eksponensial berikut:

$$P(x) = \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_1}}{n_1!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_2}}{n_2!}\right)\ldots\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_p}}{n_p!}\right)$$

Proposisi 2.4.2

(ii) $\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)^n = 1+nx+\frac{n^2x^2}{2!}+\frac{n^3x^3}{3!}+\ldots$

(iii) $\frac{e^x+e^{-x}}{2} = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots$

(iv) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \dots$

DEFINISI:

Barisan Binair adalah barisan yang suku-sukunya hanya menggunakan angka 0 atau 1.

Contoh: $(0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1,1)$ dan $(1,0,1,0)$

Banyaknya barisan binair yang panjangnya 3 adalah 8 = 2^3

yaitu $(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)$ dan $(1,1,1)$

Sedangkan, **barisan kuarternair** adalah barisan yang suku-sukunya hanya menggunakan angka-angka 0, 1, 2, 3. Barisan kuarternair k-angka adalah barisan kuarternair dengan panjang k. Misal 1120023 adalah barisan kuarternair 7-angka.

Contoh 2.4.1:

Tentukan banyaknya barisan binair k-angka, yang memuat angka nol sebanyak genap dan angka satu sebanyak ganjil.

<u>Penyelesaian:</u>

Fungsi Pembangkit untuk permasalahan di atas adalah:

P(x) = $\left(1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \dots\right)\left(\dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dots\right)$

$= \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$= \dfrac{1}{4}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2x)^k}{k!} - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2x)^k}{k!}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k x^k}{k!} - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k x^k}{k!}$$

Jadi banyaknya barisan biner k angka yang diminta adalah:

= koefisien dari $\frac{x^k}{k!}$ dalam P(x)

$$= \frac{1}{4}.2^k - \frac{1}{4}.(-2)^k$$

<u>Soal:</u>

1) Sebuah kata sandi yang panjangnya k, dibentuk dengan menggunakan huruf- huruf a,b,dan c sedemikian hingga memuat paling sedikit satu a, satu b, dan satu c . Ada berapa kata sandi yang dapat dibuat?
2) Tentukan banyaknya barisan binair k-angka yang memuat:
   a) angka ''1'' sebanyak bilangan genap
   b) angka ''1'' sebanyak bilangan ganjil dan angka "0" sebanyak bilangan genap
3) Tentukan banyaknya barisan quarternair k-angka yang memuat:
   a) angka ''0'' dan "1" masing-masing genap dan angka "2" dan "3" masing-masing ganjil.
   b) Angka "1" paling sedikit satu dan angka-angka yang lain masing-masing bilangan genap.

Fungsi pembangkit eksponensial, dapat digunakan untuk memecahkan masalah pendistribusian obyek-obyek yang berbeda ke dalam sel-sel yang berbeda.

Contoh 2.4.2:

Tentukan banyaknya cara mendistribusikan r macam obyek yang berbeda ke dalam n sel yang berbeda jika setiap sel mendapat paling sedikit satu obyek.

Penyelesaian:

Fungsi pembangkit dari permasalahan ini adalah:

$$
\begin{aligned}
P(x) &= \left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)^n \\
&= \left(e^x-1\right)^n \\
&= \binom{n}{0}e^{xn}-\binom{n}{1}e^{x(n-1)}+\dots+(-1)^k\binom{n}{k}e^{x(n-k)}+\dots+(-1)^n\binom{n}{n}
\end{aligned}
$$

Untuk $0 \le k \le n$, koefisien $\frac{x^r}{r!}$ dalam $e^{x(n-k)}$ adalah $(n-k)^r$.

Maka koefisien $\frac{x^r}{r!}$ dalam $P(x)$ adalah $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^r$.

Jadi banyaknya cara yang dimaksud adalah: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^r$.

Contoh 2.4.3:

Tentukan banyaknya cara mendistribusikan r macam obyek yang berbeda ke dalam n sel yang identik bila setiap sel mendapat paling sedikit satu obyek.

Penyelesaian:

Karena n sel identik, maka jawaban 1.4.2 harus dibagi n!

Jadi banyak cara mendistribusikan r macam obyek yang berbeda ke dalam n sel yang identik sedemikian hingga setiap sel memperoleh paling sedikit satu obyek adalah:

$$S(r,n)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^r.$$

$S(r,n)$ dikenal sebagai bilangan Stirling ke-2. Perhatikan, untuk $n > r$, $S(r,n) = 0$ sebab tidak ada cara menempatkan r macam obyek ke dalam $n > r$ sel sedemikian hingga tiap sel memperoleh paling sedikit satu macam obyek.

Soal

Tentukan banyaknya cara menempatkan n-orang yang berbeda di dalam 100 kamar berbeda sedemikian hingga:

(a) Tidak ada kamar yang kosong

(b) Tiap kamar berisi paling sedikit satu dan paling banyak dua orang.

BAB III

RELASI REKURSIF

3.1. Pengantar

Relasi rekursif adalah salah satu topik penting dan menarik dalam membicarakan kombinatorik. Banyak permasalahan dalam Matematika, khususnya yang terkait dengan kombinatorik dapat dimodelkan ke dalam bentuk relasi rekursif. Sebagai ilustrasi, disajikan berikut:

- Misal P_n adalah banyaknya permutasi dari n objek yang berbeda di peroleh hubungan:

  $$P_1 = 1, \ P_n = n.P_{n-1}, \quad n \geq 2.......(1)$$

  Bentuk (1) disebut relasi rekursif untuk P_n.

  $P_1 = 1$ disebut kondisi awal.

  $P_n = n.\ P_{n-1}$ di sebut bagian rekursif dari relasi rekursif tersebut.

- Diketahui barisan bilangan **Fibonanci**
  $(1,1,2,3,5,8,13,...)$

  Misal $F_n =$ suku ke-n dari barisan tersebut.

  Diperoleh hubungan:

  $F_1 = F_2 = 1$

  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$

  $F_1 = 1 \ dan \ F_2 = 1$ disebut kondisi awal.

Setelah memodelkan suatu masalah ke dalam bentuk relasi rekursif, langkah selanjutnya adalah menyelesaikan relasi rekursif tersebut.

Dalam bab ini, akan dibahas beberapa teknik untuk menyelesaikan suatu relasi rekursif. Misalnya, relasi rekursif dapat diselesaikan dengan metode ”akar karakteristik”. Jika dengan metode tersebut mengalami kesulitan, maka dapat diselesaikan dengan metode ”fungsi pembangkit”.

3.2 Relasi Rekursif Linear dengan Koefisien Konstanta

Bentuk umum bagian rekursif dari suatu relasi rekursif linear berderajat k adalah sebagai berikut:

$$a_0 + h_1(n)a_{n-1} + h_2(n)a_{n-2} + ... + h_k(n)a_{n-k} = f(n)$$

Dimana $h_i(n)$ dan $f(n)$ adalah fungsi dalam n dan $h_k(n) \neq 0$

- Jika $f(n) = 0$ maka relasi rekursifnya disebut **homogen**, jika tidak demikian disebut **non homogen**.
- Jika untuk setiap $i \in \{1,2,3,...,k\}, h_i(n)$=konstanta, maka relasi rekursifnya disebut **relasi rekursif dengan koefisien konstanta**.
- Suatu relasi rekursif berderajat k terdiri dari sebuah bagian rekursif dan k kondisi awal berurutan.

Contoh 3.2.1:

1. $a_1 = a_2 = 0; a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1, n \geq 3$ adalah relasi rekursif linear non homogen berderajat dua dengan koefisien konstanta.
2. $a_1 = a_2 = 0; a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3$ adalah relasi rekursif linear homogen berderajat dua dengan koefisien konstanta.

3.3 Relasi Rekursif Linear Homogen dengan Koefisien Konstanta

Bentuk umum:

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k} = 0, c_k \neq 0 \text{ …..(3.3.1)}$$

Dengan k kondisi awal, dan untuk $1 \leq i \leq k, c_i$ = konstanta

Pada bagian ini akan dikembangkan suatu teknik untuk menyelesaikan relasi rekursif (3.3.1). Untuk maksud tersebut, diperlukan teorema-teorema berikut:

Teorema 3.3.1 (Prinsip Superposisi)

Jika $g_1(n)$ dan $g_2(n)$ berturut-turut adalah solusi dari

$a_{n +} c_1\ a_{n-1} + c_2\ a_{n-2} + … + c_k\ a_{n-k} = f_1(n)$………..(3.3.2)

Dan

$a_{n +} c_1\ a_{n-1} + c_2\ a_{n-2} + … + c_k\ a_{n-k} = f_2(n)$………..(3.3.3)

untuk sebarang konstanta $\bar{c}_1$ dan $\bar{c}_2$, maka bentuk $\bar{c}_1$ $g_1(n)$ + $\bar{c}_2$ $g_2(n)$ adalah solusi dari

$a_{n +} c_1\ a_{n-1} + c_2\ a_{n-2} + … + c_k\ a_{n-k} = \bar{c}_1\ f_1(n) + \bar{c}_2\ f_2(n)$ …..(3.3.4)

Bukti:

Sebagai akibat dari Teorema 3.3.1, diperoleh teorema berikut:

Teorema 3.3.2

Jika $g_1(n)$, $g_2(n)$, …., $g_k(n)$ berturut-turut adalah solusi dari

$a_{n} + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} = 0$……….(3.3.5) untuk sebarang konstanta $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$,...., $\bar{c}_k$ maka bentuk $\bar{c}_1$ $g_1(n)$ + $\bar{c}_2$ $g_2(n)$ + ...+ $\bar{c}_k$ $g_k(n)$ adalah solusi dari persamaan (3.3.5) juga

Untuk menyelesaikan relasi rekursif (3.3.1), maka dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah-langkah Menyelesaikan Relasi Rekursif dengan Metode Akar Karakteristik

1. **Untuk akar- akar berbeda.**

   Langkah-langkah penyelesaian yang dapat di lakukan adalah sebagai berikut:

   a. Misalkan $a_n = x^n, x \neq 0.$

   b. Jika $x_1, x_2, ..., x_k$ akar- akar yang berbeda, maka solusi umumnya:

   $$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + ... + c_k x_k^n$$

   c. Dengan k kondisi awal, diperoleh $c_1, c_2, ..., c_k$.

   d. Masukkan ke persamaan (*), diperoleh solusi dari relasi rekursifnya.

Contoh 3.3.1:

Selesaikan hubungan rekursif berikut.

$$a_1 = a_2 = 1; a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3$$

<u>Penyelesaian:</u>

Misal $a_n = x^n, x \neq 0.$

Bentuk rekursif $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ menjadi:

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$$

$\leftrightarrow x^n - x^{n-1} - x^{n-2} = 0$ (bagi dengan x^{n-2})

$\leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ (disebut persamaan karakteristik)

$\leftrightarrow \quad x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Solusi umumnya adalah:

$$a_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Dari kondisi awal $a_1 = 1$ dan $a_2 = 1$, jika disubstitusikan pada solusi umum, diperoleh:

$$a_1 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$a_2 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Selesaikan kedua persamaan tersebut, sehingga diperoleh nilai c_1 dan c_2. Dari persamaan di peroleh $c_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$ dan $c_2 = \frac{-\sqrt{5}}{5}$ jadi solusi dari relasi rekursifnya:

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Catatan:

a_n melibatkan bilangan irasional. Tetapi untuk setiap $n \geq 1$, maka a_n merupakan bilangan bulat non negatif.

2. Untuk akar rangkap

Langkah- langkah penyelesaian yang dapat dilakukan sama dengan relasi rekursif yang mempunyai akar yang berbeda.

Misalkan terdapat m akar rangkap, yang nilainya x_1, dimana $m \leq k$. Solusi umumnya adalah sebagai berikut:

$$a_n = c_0 x_1^n + c_1 n x_1^n + c_2 n^2 x_1^n + \ldots + c_{m-1} n^{m-1} x_1^n.$$

Contoh 3.3.2:

Carilah formula untuk a_n yang memenuhi relasi berikut:

$a_n = 3a_{n-1} + 6a_{n-2} - 28a_{n-3} + 24a_{n-4}$

Dengan $a_0 = 1; a_1 = 2; a_2 = 3$ dan $a_3 = 4$

Penyelesaian:

Misal $a_n = x^n, x \neq 0.$

Bagian rekursi dari relasi rekursinya adalah sebagai berikut:

$x^n = 3x^{n-1} + 6x^{n-2} - 28x^{n-3} + 24x^{n-4}$

$\leftrightarrow x^n - 3x^{n-1} - 6x^{n-2} + 28x^{n-3} - 24x^{n-4} = 0$ (bagi dengan x^{n-4})

$\leftrightarrow x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 28x - 24 = 0$ (disebut persamaan karakteristik)

$\leftrightarrow (x-2)^3(x+3) = 0$

Akar- akar dari persamaan karakteristiknya :

$x = 2$ (rangkap 3) dan $x = -3$

Solusi umum dari relasi rekursif di atas :

$a_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n + c_3 n^2 2^n + c_4 (-3)^n$ ....(*)

Untuk $a_0 = 1; a_1 = 2; a_2 = 3$ dan $a_3 = 4$, dari (*) diperoleh sistem persamaan sebagai berikut:

$1 = c_1 + c_4$

2= $2c_1 + 2c_2 + 2c_3 - 3c_4$

3 = $4c_1 + 8c_2 + 16c_3 + 9c_4$

4 = $8c_1 + 24c_2 + 72c_3 - 27c_4$

Sehingga :

$$c_0 = 1\frac{2}{125};\ c_1 = \frac{7}{200};\ c_2 = -\frac{3}{40};\ c_3 = -\frac{2}{125}$$

Substitusikan nilai- nilai tersebut dalam persamaan (*), maka penyelesaiannya:

$$a_n = 1\frac{2}{125}\left(2^n\right) + \frac{7}{200}n\left(2^n\right) - \frac{3}{40}n^2\left(2^n\right) - \frac{2}{125}\left(-3^n\right)$$

Soal:

Selesaikan relasi rekursif berikut dengan metode akar karakteristik.

1) $a_0 = 0,\ a_1 = -1$

   $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}, n \geq 2$

2) $a_0 = a_1 = 1$

   $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, n \geq 2$

3) $a_1 = 2, a_2 = 6$

   $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0, n \geq 3$

4) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2$

   $a_n = 9a_{n-1} - 15a_{n-2} + 7a_{n-3}, n \geq 3$

5) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$

   $a_n + 2a_{n-2} + a_{n-4} = 0, n \geq 4$

3.4 Menyelesaikan Relasi Rekursif dengan Fungsi Pembangkit

Dalam pembahasan sebelumnya, kita telah membicarakan tentang fungsi pembangkit dan aplikasinya. Pada bagian ini, kita akan membicarakan penerapan fungsi pembangkit untuk menyelesaikan suatu relasi rekursif yang tidak mungkin diselesaikan dengan cara metode akar karakteristik.

Contoh 3.4.1:

Gunakan fungsi pembangkit biasa untuk menyelesaikan relasi rekursif berikut:

$$a_0 = 1, a_1 = 3, a_n = 2a_{n-1} + 4^{n-1}, n \geq 2$$

Penyelesaian :

Misal $P(x)$ adalah fungsi pembangkit biasa dari barisan a_n maka menurut definisi:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Karena untuk $n \geq 2, a_n = 2a_{n-1} + 4^{n-1}$, kalau kedua ruas dari persamaan ini dikali x^n kemudian dijumlahkan untuk $n = 2$ sampai $n = \infty$ diperoleh:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(2a_{n-1} + 4^{n-1}\right) x^n$$

Ekivalen dengan

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 4^{n-1} x^n$$

Ruas kiri persamaan adalah

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x$$

$$= P(x) - 1 - 3x$$

Suku pertama ruas kanan persamaan adalah

$$2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n} = 2x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1}$$

$$= 2x\,(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} - a_0\,)$$

$$= 2x\left(P(x)-1\right)$$

$$= 2x\;P(x) - 2x$$

Suku kedua ruas kanan persamaan adalah

$$\sum_{n=2}^{\infty} 4^{n-1}x^{n} = \; x\sum_{n=2}^{\infty} 4^{n-1}x^{n-1}$$

$$= \; x\,(\sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1}x^{n-1} - a_0\,)$$

$$= \; x\,(\frac{1}{1-4x} - 1\,)$$

$$= \; \frac{x}{1-4x} - x$$

Sehingga persamaan menjadi

$$P(x) - 1 - 3x = 2x\,P(x) - 2x + \frac{x}{1-4x} - x$$

Ekuivalen dengan

$$P(x) = \frac{1-3x}{(1-4x)(1-2x)}$$

Karena $\frac{1-3x}{(1-4x)(1-2x)} = \frac{1/2}{1-4x} + \frac{1/2}{1-2x}$

$$P(x) = \frac{1}{2}\;(\frac{1}{1-4x} + \frac{1}{1-2x})$$

$= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (4x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n \right)$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(4^n + 2^n\right) x^n$

Dengan demikian, penyelesaian yang di maksud adalah $a_n = \frac{1}{2}\left(4^n + 2^n\right)$.

Contoh 3.4.2

Selesaikan relasi rekursif berikut dengan menggunakan fungsi pembangkit:

$a_0 = 1$

$n.a_{n-1} = 3\ a_n - 2^n$; $n \geq 1$

Penyelesaian:

Misal $P(x)$ adalah fungsi pembangkit eksponensial dari barisan a_n maka menurut definisi:

P(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \frac{x^n}{n!}$

Karena, **$n \geq 1$ dan $n.a_{n-1} = 3\ a_n - 2^n$;** Jika bagian rekursif kalau kedua ruas dikali x^n /n!, kemudian dijumlahkan untuk **n = 1** sampai $n = \infty$ diperoleh:

………..

Ekivalen dengan : ……… ….(*)

Ruas kiri (*) = …….

= …….

Ruas kanan (*) bagian I = ………..

= ………..

= ………..

Ruas kanan (*) bagian II = ………..

= ………..

= ………..

Sehingga (*) menjadi :……………..

………………..

…………………

Jadi barisan (a_n) = …………………

Soal:

Selesaikan relasi rekursif berikut dengan metode fungsi pembangkit:

1) $a_{n+1} - a_n = 3^n, n \geq 0, a_0 = 1$

2) $a_{n+1} - a_n = n^2, n \geq 0, a_0 = 1$

3) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n, n \geq 0, a_0 = 1, a_1 = 2$

4) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = n, n \geq 0, a_0 = 1, a_1 = 2$

5) $a_1 = 3$; $a_{n-1} = 3\, a_n + 2^n$; $n \geq 0$

BAB IV

TEORI GRAP

4.1 Definisi dan terminologi

❖ Sebuah Grap G adalah pasangan (V(G),E(G)) dimana

V(G) : Himpunan titik (berhingga, tak kosong) dan

E(G) : Himpunan sisi (mungkin kosong) sedemikian sehingga setiap sisi e di dalam E(G) adalah pasangan tak berurutan dari titik-titik di V(G).

❖ Jika u dan v adalah titik-titik di Garap G dan sisi e = {u,v};(sering ditulis e=uv) adalah sisi dari G, kita katakan:

- Sisi e menghubungkan titik-titik u dan v ;
- u dan v berhubungan langsung *(adjacent*) ;
- u dan v titik-titik akhir dari sisi e ;
- sisi e terkait *(incident)* dengan titik u dan v.

- Sebuah grap dapat dipresentasikan dalam bentuk diagram, di mana setiap titik digambarkan dengan sebuah noktah dan setiap sisi yang menghubungkan dua titik di gambar dengan kurva sederhana (ruas garis) dengan titik- titik akhir di kedua titik tersebut.

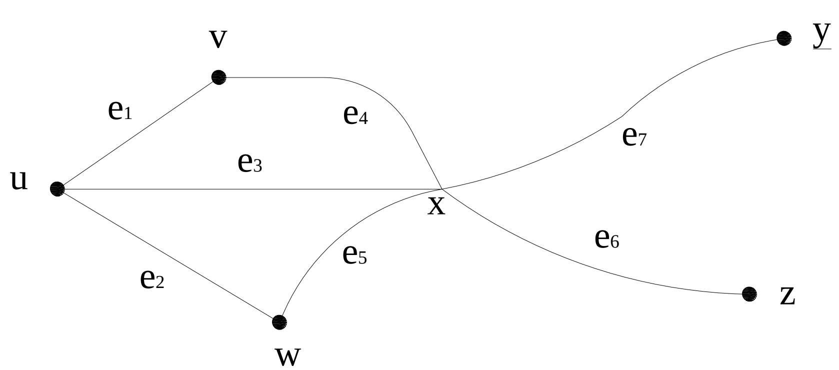
Contoh 4.1.1:

Sebuah grap G=(V(G),E (G)) dengan

V(G)= $\{u, v, w, x, y, z\}$dan E(G)= $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

Di mana e_1=uv, e_2=uw, e_3=ux, e_4=vx, e_5=wx, e_6=xz, dan e_7=xy

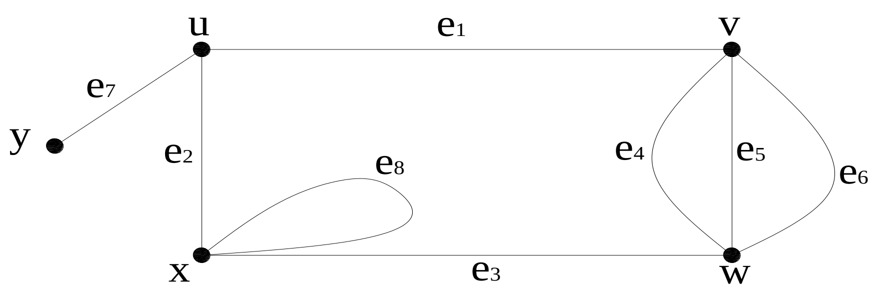
Dapat dipresentasikan dalam bentuk diagram seperti terlihat dalam gambar berikut.



Gambar 4.1.1: Grap G

- Sebuah sisi di grap G yang menghubungkan sebuah titik v dengan dirinya sendiri disebut **gelung *(loop)***
- Dalam sebuah grap, apabila terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik, maka sisi tersebut di sebut **sisi rangkap *(multiple edges)***

Contoh 4.1.2:



Gambar 4.1.2: Grap G

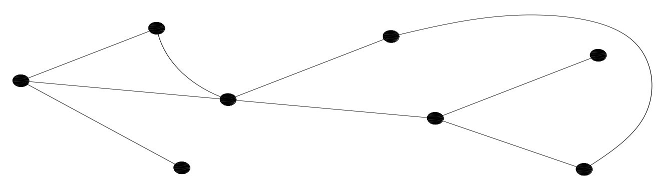
- Grap G dengan 5 titik dan 8 sisi;
  Sisi e_8 disebut gelung

  Sisi- sisi e_4, e_5, e_6 disebut sisi rangkap.

4.1.1 Jenis-jenis Grap

a. Grap Sederhana

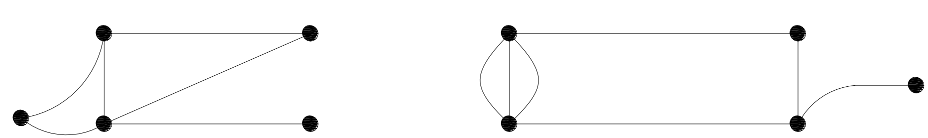
Sebuah grap yang tidak memiliki gelung dan tidak memiliki sisi rangkap disebut **grap sederhana**.



Gambar 4.1.3: Grap G sederhana

b. Grap rangkap

Sebuah grap yang memiliki sisi rangkap tetapi tidak memiliki gelung disebut **grap rangkap (multi grap)**

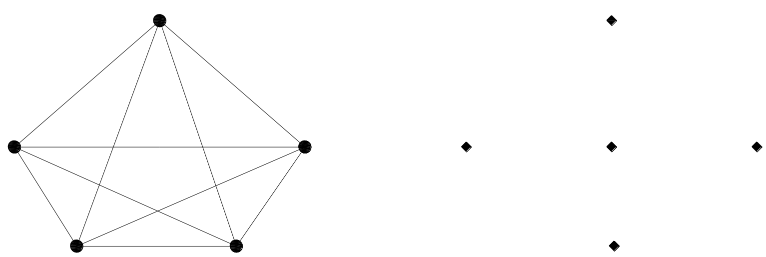


Gambar 4.1.4

c. Grap Komplit

Sebuah grap disebut grap komplit dengan n titik (ditulis ”Kn”), jika grap tersebut adalah grap sederhana dimana untuk setiap dua titik di hubungkan dengan sebuah sisi.

$\overline{Kn}$: grap kosong dengan n titik adalah sebuah grap dengan n titik yang tidak punya sisi.



K_5 $\qquad\qquad$ $\overline{K_5}$

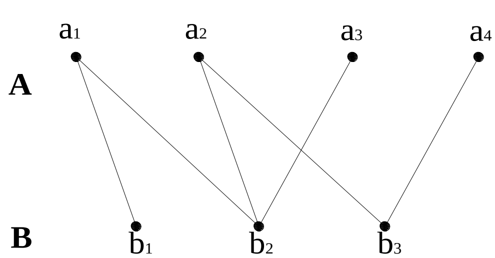
Gambar 4.1.5

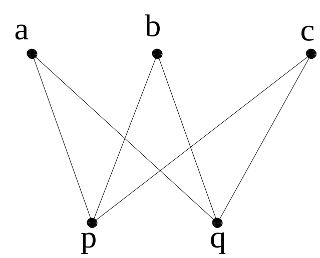
d. **Grap Bipartisi**

Sebuah grap G disebut **grap bipartisi,** jika G grap sederhana dan V(G) dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian A dan B sedemikian hingga setiap sisi dari G menghubungkan sebuah titik di A dan sebuah titik di B. Kita sebut (A,B) bipartisi dari G.

e. **Grap Bipartisi Komplit**

Selanjutnya apabila G sederhana dan bipartisi dengan partisi (A,B) sedemikian hingga setiap titik di A berhubungan langsung dengan setiap titik di B, maka G disebut **Grap Bipartisi Komplit**, dilambangkan dengan **Km,n**, dimana $|A|$= m dan $|B|$=n.





G :Grap Bipartisi Komplit

$K_{3,2}$: Grap Bipartisi Komplit

Dengan bipartisi (A,B)

A = $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

B = $\{b_1, b_2, b_3\}$

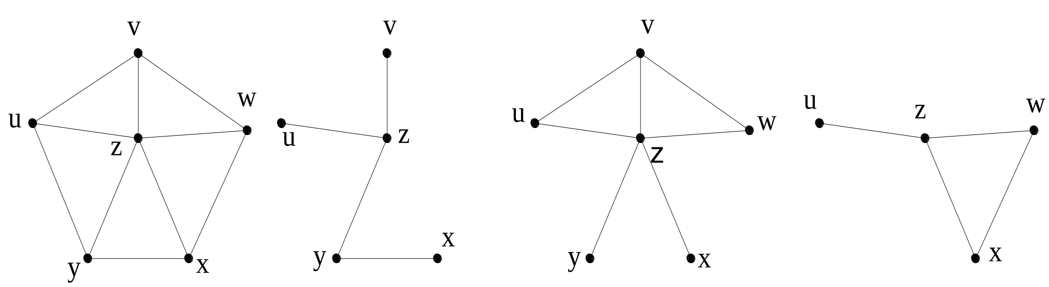
Gambar 4.1.6

f. **Grap Bagian**

Grap H disebut grap bagian dari grap G, ditulis H$\subseteq G, jika V(H) \subseteq V(G) dan E(H) \subseteq E(G)$.

Jika H$\subseteq G, jika V(H) = V(G)$, maka H disebut Grap Bagian rentang (*spanning Sub Grap*) dari G.

Grap bagian dari G yang di bangun oleh $V_1(V_1 \subseteq V(G))$, di tulis $G[V_1]$, adalah grap bagian dari G yang himpunan titiknya adalah V_1 dan himpunan sisinya beranggotakan semua sisi G yang mempunyai titik- titik akhir di V_1.



G **H_1** **H_2** **H_3**

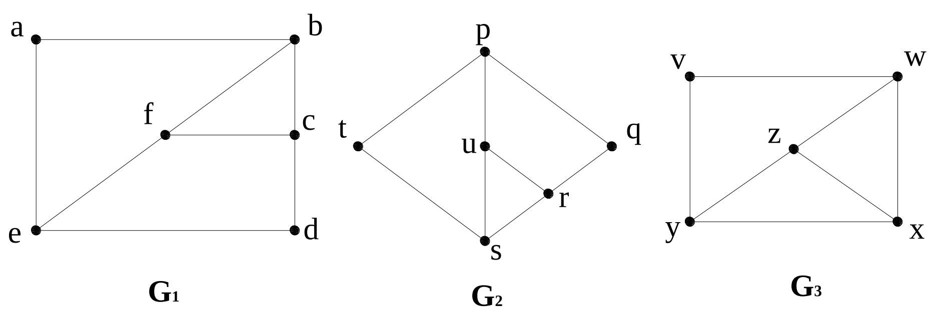
Gambar 4.1.7

- H_1 Grap Bagian dari Grap G
- H_2 Grap Bagian Rentang dari Grap G
- H_3 Grap bagian G yang dibangun oleh {u,w,x,z} atau
  H_3 =[{u,w,x,z}]

g. **Grap Isomorfik**

Dua grap G dan H disebut **Isomorfik** , ditulis $G \cong H$, apabila:

1. Terdapat korespondensi satu- satu antara $V(G) dan V(H)$
2. Banyaknya sisi yang menghubungkan dua titik u dan v di G, sama dengan banyaknya sisi yang mengubungkan dua titik di H yang berkorespodensi dengan titik u dan v.



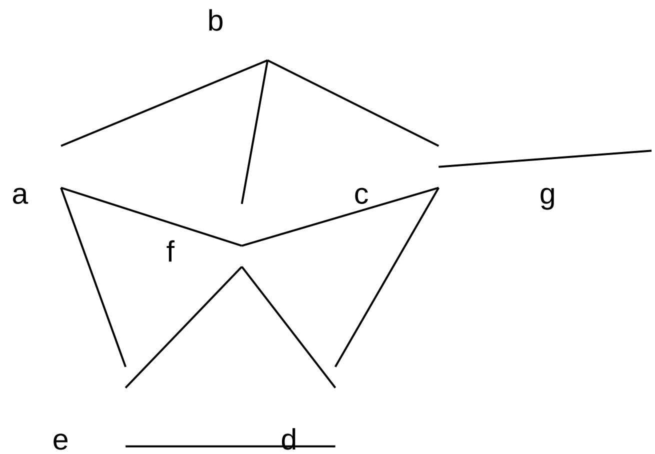
Gambar 4.1.8: Grap G_1 dan G_2 adalah dua grap isomorfik

4.1.2 Beberapa Istilah

a. **Jalan**

Sebuah jalan (***walk***) di grap G adalah sebuah barisan berhingga (tak kosong) W= $v_o e_1 v_1 e_2 v_{2.......} e_k v_k$, yang suku- sukunya bergantian titik dan sisi, sedemikian hingga v_{i-1} dan v_i adalah titik akhir dari e_i untuk $1 \le i \le k$. W adalah jalan dari v_o ke v_k atau jalan $(v_{0,} v_k)$.

- Titik awal dari w: v_o
- Titik akhir dari w: v_k
- Titik- titik Internal W: $v_1, v_2, ..., v_{k-1}$
- Panjang W= k (banyak sisi di W).



Gambar 4.1.9: Grap G

b. Trail (Jejak)

Jika semua sisi $e_1, e_2, ..., e_k$ dalam jalan W berbeda, maka W disebut jejak (***trail***).

c. Path (Lintasan)

Jika dalam suatu jejak, semua titik $v_0, v_1, v_2, ..., v_k$ di jalan W juga berbeda, maka W disebut lintasan (***path***).

d. Jejak Tutup (Sirkit)

Jejak tertutup adalah jalan yang titik awal dan titik akhirnya identik (sama) dan panjang jalan harus positip.

e. Sikel *(Cycle)*

Sebuah jejak tertutup (***closed trail***) yang titik awal dan semua titik internalnya semuanya berbeda disebut sikel (***cycle***).

Banyaknya sisi dalam suatu sikel disebut panjang dari sikel tersebut. Sikel dengan panjang k disebut sikel-k.

f. Sirkit *Euler*

Sebuah Sirkit di grap G yang memuat semua sisi Grap G disebut *Sirkit Euler*.

Sebuah grap G yang memuat sirkit *Euler* disebut *Grap Euler*.

g. Sikel *Hamilton*

Sebuah sikel di grap G yang memuat semua titik Grap G disebut Sikel *Hamilton.*

Sebuah grap G yang memuat sikel *Hamilton* disebut Grap *Hamilton.*

Contoh 4.1.3.

Perhatikan grap pada Gambar 4.1.9 di atas, berikan contoh jalan, jejak, lintasan, sirkit, sikel.

Penyelesaian:

Jalan W = abfedfbcg

Jejak W_1 = ...

Lintasan W_2 = ...

Sirkit W_3 = ...

Sikel W_4 = ...

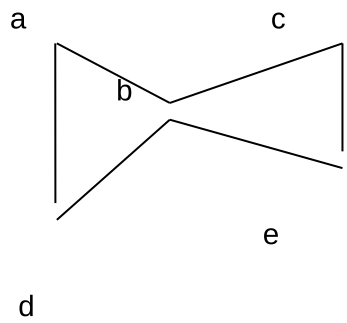
Contoh 4.1.4

(a). Gambarlah grap G yang merupakan grap *Euler*.

(b). Gambarlah grap H yang merupakan grap *Hamilton.*

Penyelesaian:

(a). Contoh grap *Euler*



Gambar 4.1.10: Grap G adalah Grap *Euler*

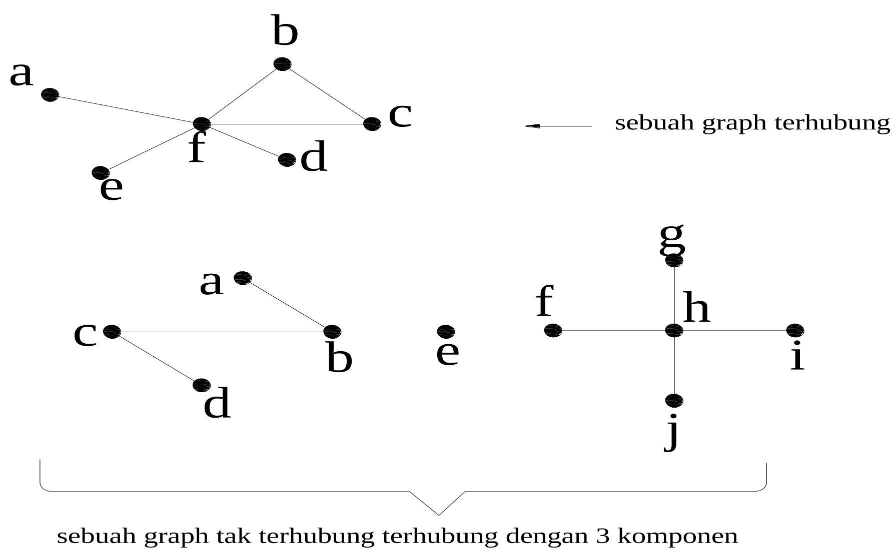
(b). Contoh Grap *Hamilton*

Gambar 4.1.11: Grap H adala Grap *Hamilton*

h. Grap terhubung

Sebuah grap G dikatakan *terhubung*, jika G grap sederhana dan untuk setiap dua titik u dan v di G terdapat lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Sebaliknya, grap G di sebut grap tak terhubung (terputus).

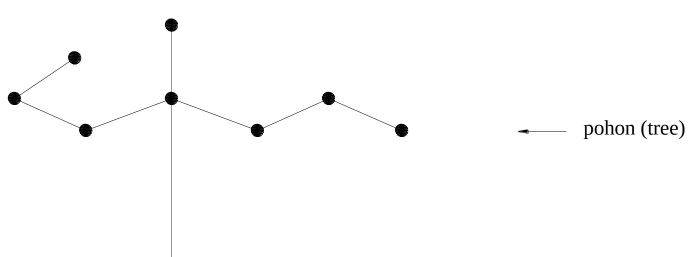
Sebuah komponen dari grap G adalah sebuah grap bagian terhubung maksimal (titik dan sisi) dari G. Jadi sebuah grap terhubung hanya mempunyai satu komponen.



Gambar 4.1.12

i. Pohon (*Tree*)

Sebuah grap terhubung tanpa sikel di sebut pohon (***tree***). Sedangkan sebuah grap yang setiap komponennya pohon disebut Hutan (*Forest*).

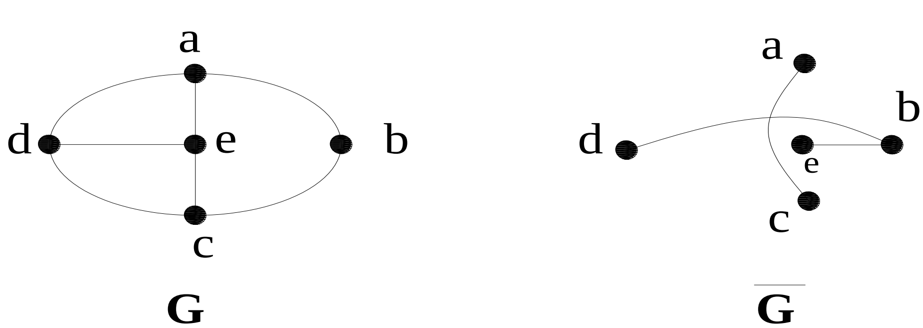


Gambar 4.1.13

k. Komplemen Grap

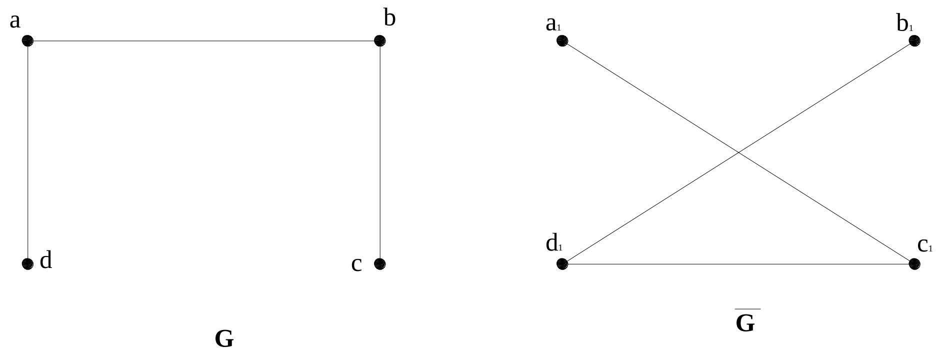
Misalkan G adalah grap sederhana.

Komplemen G, di tulis $\overline{G}$, adalah grap sederhana yang himpunan titiknya sama dengan himpunan titik G, dan dua titik u dan v di $\overline{G}$ berhubungan langsung jika dan hanya jika u dan v tidak berhubungan langsung di G.



Gambar 4.1.14: Grap G dan komplemennya

Misal G adalah sebuah grap. Apabila $G \cong \overline{G}$, G di sebut **grap komplemen- diri** *(self-Complementary grap)*



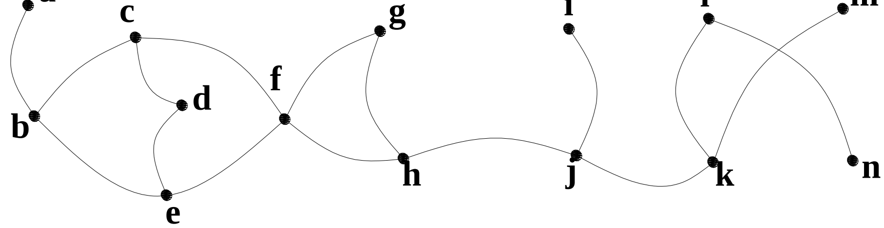
Gambar 4.1.15: Grapa G dan Komplemen diri

Catatan.

Jika G grap sederhana dengan n titik , maka $G \cup \overline{G} = K_n$

<u>Soal:</u>

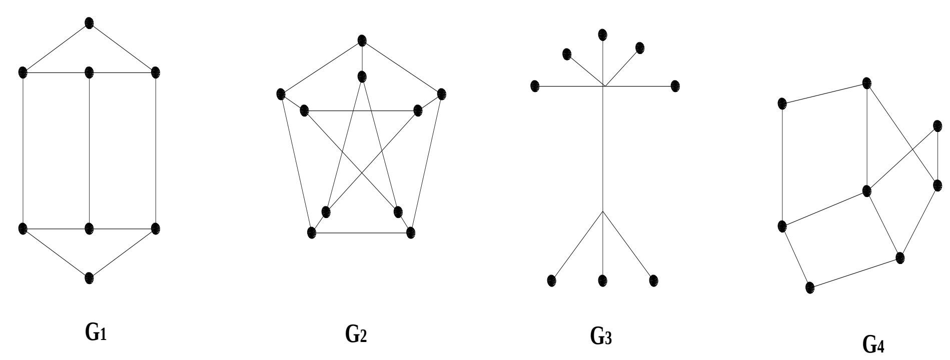
1. Perhatikan grap G di bawah ini.



Gambar 4.1.16

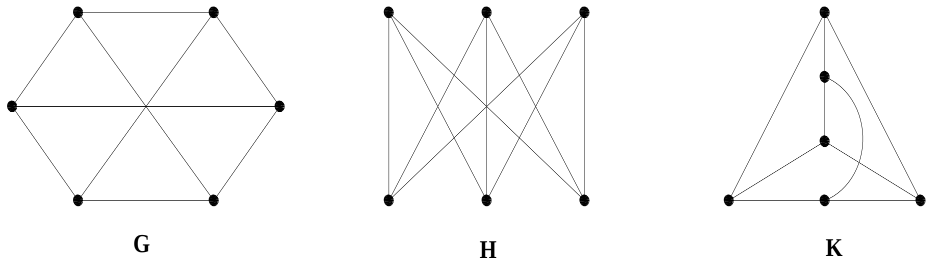
a. Cari sebuah jalan tertutup dengan panjang 9.
b. Cari sebuah jejak terbuka dengan panjang 9.
c. Cari sebuah jejak tertutup dengan panjang 7.
d. Cari sebuah lintasan dari a ke n
e. Cari panjang sikel terpanjang dalam G
f. Berapakah panjang lintasan terpanjang ?
g. Cari sebuah grap bagian bukan rentang dari G.
h. Cari sebuah grap bagian rentang dari G.
i. Tulis grap bagian yang di bangun oleh $\{a, b, c, d, f, j, k, l\}$

2. Gambar sebuah grap yang :
   a. Mempunyai lima titik, tanpa sikel, terhubung;
   b. Mempunyai enam titik, dua komponen;
   c. Sederhana sedemikian hingga G dan $\overline{G}$ mempunyai banyak sisi yang sama.
3. Manakah grap berikut yang bipartisi?



Gambar 4.1.17

4. Perhatikan grap- grap berikut ini.



Gambar 4.1.18

a. Apakah G isomorfik dengan H?
b. Apakah H isomorfik dengan K?
c. Apakah G isomorfik dengan K?

6) Jika G grap bipartisi sederhana, tunjukkan bahwa panjang setiap sikel di G adalah genap.
7) Jika G grap sederhana dengan paling sedikit 6 titik, maka G atau $\overline{G}$ memuat sebuah sikel yang panjangnya 3. Buktikan !
8) Jika G grap sederhana dengan n titik, m sisi, dan k komponen. Buktikan bahwa berlaku hubungan $m \geq n - k$.
9) Jika G grap Bipartisi, sederhana dengan n titik dan m sisi. Buktikan berlaku hubungan $m \leq n^2 / 4$

4.2 Derajat Titik

- ❖ Misalkan v adalah sebuah titik di grap G.

  Banyaknya sisi G yang terkait di titik v (loop di hitung dua kali) di sebut derajat titik v, dilambangkan denganm dG(v) atau d(v).

- ❖ Derajat minimum dari G dinotasikan $\delta(G)$, didefinisikan sebagai $\delta(G)$= minimum $\{d(v) : v \in V(G)\}$.

Derajat maksimum dari G dinotasikan $\Delta(G)$, didefinisikan sebagai $\Delta(G)$= maksimum $\{d(v) : v \in V(G)\}$.

❖ Grap G di sebut beraturan-k apabila setiap titik G berderajat k.

Karena dalam menentukan jumlah derajad semua titik di grap G kita menghitung stiap sisi G dua kali, maka diperoleh teorem berikut.

Teorema 4.2.1 (*Lemma Jabat Tangan*)

Untuk setiap grap G berlaku, Jumlah derajad titik di grap G sama dengan dua kali banyaknya sisi.

Bukti:

....

....

....

....

....

....

....

Akibat dari Teorema 4.1, maka diperoleh Corolary sebagai berikut:

Corolary 4.2.2

Banyaknya titik berderajat ganjil dalam suatu grap G adalah genap.

Bukti:

Pandang sebuah grap G.

Misal V_1 dan V_2 berturut-turut himpunan semua titik yang berderajat genap dan ganjil, maka :

V(G) = gabungan V_1 dan V_2

Sehingga: ....

....

..................................T.4.1

Karena setiap titik v di V_1, d(v) genap, maka ....

Akibatnya ....harus genap.

Selanjutnya, untuk setiap titik w di V_2, d(w) maka haruslah

.... Terbukti

Catatan:

1. Barisan derajat dari grap G adalah barisan monoton turun dari derajat titik- titik G. Sedangkan barisan derajat dari sebuah grap sederhana di sebut grapik.
2. Barisan bilangan bulat non negatif (d_1,d_2,d_3,...,d_n) adalah barisan derajat dari sebuah grap jika dan hanya jika $\sum_{i=1} d_i genap$.
3. Misalkan $\pi = (d_{1,}\ d_{2,} d_{3,\ldots\ldots,} d_n)$ adalah barisan bilangan bulat non negatif yang monoton turun, π grapik jika dan hanya jika barisan: $(d_2 - 1, d_3 - 1, d_4 - 1, \ldots, d_n)$merupakan grafik.

Contoh 4.2.1

Diketahui barisan bilangan bulat monoton turun $\pi = (5,4,3,3,3,2\ )$

(a) Apakah π merupakan barisan derajat dari suatu grap ?
(b) Apakah π merupakan grafik ?

Penyelesaian:

(a) Ya, sebab ....
(b) Menurut catatan 3, maka diselesaikan sebagai berikut:
$\pi = (5,4,3,3,3,2\ )$

$\pi_1 = (3,2,2,3,2)$

= (3,3,2,2,2), π_1 adalah barisan derajat sebuah grap. Mengapa?

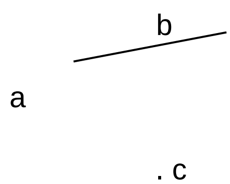
$\pi_2 = (2,1,1,2)$

= (2,2,1,1), π_2 adalah barisan derajat sebuah grap. Mengapa?

$\pi_3 = (1,0,1)$

= (1,1,0), π_3 adalah barisan derajat sebuah grap. Mengapa?

Grap π_3 sebagai berikut:



Gambar 4.2.1: π_3 grap sederhana

Dari gambar grap di atas, nampak bahwa d(a) = 1, d(b) = 1, dan d(c)=0.

Grap π_3 adalah grap sederhana, karena tidak mempunyai gelung dan tidak mempunyai sisi rangkap. Jadi π_3 adalah grafik.

Berdasarkan catatan 3, maka π_2 juga grafik. Karena π_2 grafik, maka π_1 grafik. Jadi kesimpulannya π juga grafik.

Gambar 4.2.2 : π_2

Gambar 4.2.3: π_1

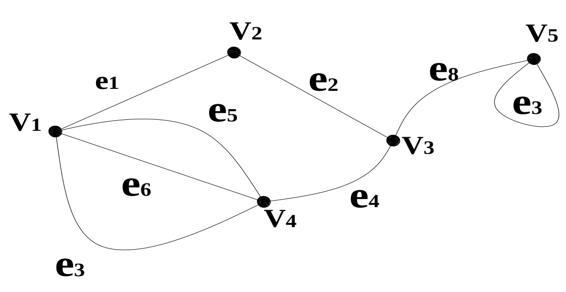
Gambar 4.2.4: π

Soal:

1) Apakah barisan- barisan berikut merupakan barisan derajat dari suatu grap?Mengapa? Jika grap, gambarkan grapnya!
   a) 6,5,4,3,3,2,2,2
   b) 5,4,4,3,3,2,1,0
   c) 3,3,3,3,3,3
   d) 5,4,3,2,1,0
2) Yang manakah dari barisan- barisan berikut merupakan grafik?
   a) 5,4,3,3,3,3
   b) 5,5,3,3,2,2,2
   c) 6,5,5,4,4,3,3,2
3) Apakah benar dalam suatu pesta banyaknya orang yang telah berjabat tangan sebanyak bilangan ganjil adalah genap?
4) Sebuah grap G mempunyai 20 sisi. Jika setiap titik G mempunyai derajat paling sedikit 4, tentukan maksimum banyaknya titik G.
5) Jika G adalah grap sederhana dengan paling sedikit dua titik, maka G memiliki paling sedikit dua titik yang berderajat sama. Buktikan !
6) Tunjukkan bahwa, jika G adalah grap yang mempunyai tepat dua titik berderajat ganjil, maka kedua titik tersebut harus terletak pada komponen yang sama.

4.3 Penyajian grap

Ada beberapa cara untuk menyajikan sebuah grap di dalanm komputer. Matriks adalah cara yang sering di gunakan. Ada dua matriks yang sering di gunakan, Yaitu:



G

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

A (G)

Gambar 4.3.1: Grap G

- Matriks berhubungan langsung *(adjacency matrix)*
- Matriks keterkaitan *(incidence matrix)*

4.3.1 Matriks Berhubungan Langsung

- ❖ Misalkan G sebuah grap dengan V(G)= $\{v_{1,} v_{2,} v_{3,\dots,} v_n\}$. Matriks berhubungan langsung dari G adalah matriks bujur sangkar berordo n, A(G)= (a_{ij}) dimana elemen a_{ij} menyatakan banyaknya sisi yang menghubungkan titik v_i dan titik v_j. Perhatikan contoh Grap di atas.
- ❖ Perhatikan bahwa A(G) adalah matriks simetris. Jika grap G tidak mempunyai gelung, maka setiap unsur pada diagonal utama adalah nol. Jika G grap sederhana, maka unsur-unsur dari matriks A(G) adalah nol atau satu.
- ❖ Jika diketahui sebuah matriks simetris A yang berordo n x n, dimana setiap unsur dari A adalah bilangan non negatif, maka pasti terdapat sebuah grap G yang berhubungan langsung dengan matriks A.

Contoh 4.3.1

Diketahui sebuah matriks A berikut:

(a). Gambarlah grap G yang berhubungan langsung dengan matriks A tersebut.

(b). Jika matriks A dikalikan dengan dirinya sendiri (A^2), maka kesimpulan apa yang diperoleh?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian:

(a). Gambar grap G yang berhubungan langsung dengan matriks A

Gambar 4.3.2: Grap G

(b). Matriks A^2 adalah :

Kesimpulan : ....

....

....

....

....

4.3.2 Matriks Keterkaitan

Untuk menyajikan suatu grap dengan matriks, selain dengan matriks berhubungan langsung juga dapat disajikan dalam matriks keterkaitan.

- Misalkan grap G mempunyai n buah titik : $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ dan s sisi : $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$,
  Matriks keterkaitan (*incidence matrix*) dari G adalah matriks M(G) = (m_{ij}) berordo nxs, dimana:

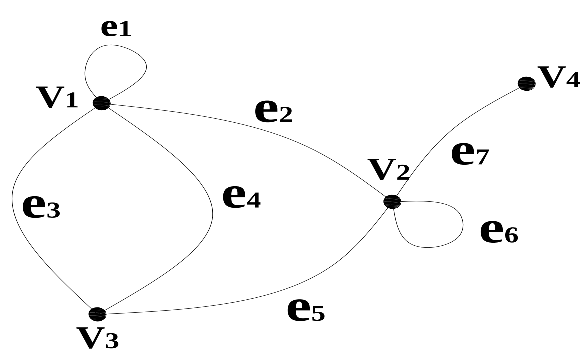
0, jika sisi e_j tidak terkait dengan titik v_j.

1, jika e_j terkait dengan v_i dan e_j bukan gelung

2, jika e_j terkait dengan v_i dan e_j adalah gelung

Matriks keterkaitan dari grap G di bawah adalah:

$$
M(G) = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$



Gambar 4.3.3

Perhatikan bahwa jumlah semua unsur M(G) yang terletak pada baris ke-i menyatakan derajat dari titik v_i di grap G.

Sedangkan jumlah semua unsur M(G) yang terletak di suatu kolom selalu 2.

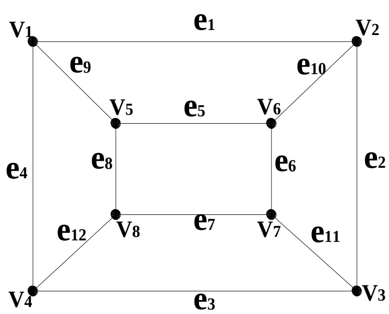
Soal:

1. Gambar grap G yang matriks berhubungan langsungnya sebagai berikut.

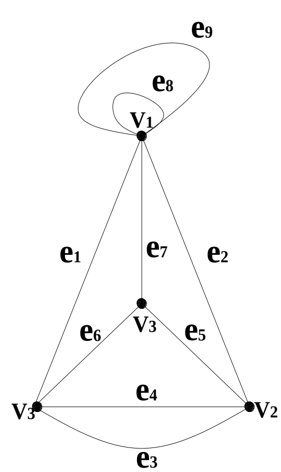
a. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. Tulis matriks berhubungan langsung dan matriks keterkaitan dan grap berikut.

a.



b.



Gambar 4.3.4

3. Diketahui suatu grap G bipartisi. Tunjukkan bahwa matriks berhubungan langsung dari G dapat ditulis dalam bentuk

$$A(G) = \begin{bmatrix} O & P \\ Q & O \end{bmatrix}$$

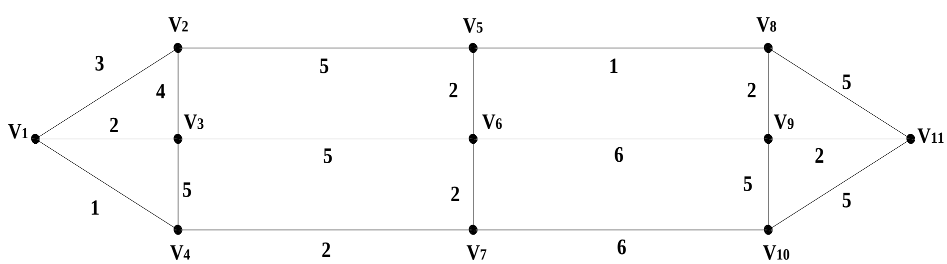
Dimana: O, P, dan Q adalah submatriks- submatriks. O submatriks yang setiap unsurnya 0, sedangkan P adalah transpose dari matriks Q.

4. Misalkan G adalah grap sederhana dan A adalah matriks yang berhubungan langsung dari G. Berikan contoh suatu grap G sederhana dan tunjukkan bahwa unsur-unsur dari A^2 yang terletak pada diagonal utama menyatakan derajat dari titik-titik grap G. Apakah pernyataan tersebut masih benar jika G bukan grap sederhana.

4.4 Lintasan Terpendek

Bila sisi e dalam grap G dikaitkan atau dipetakan dengan sebuah bilangan real W(e), maka W(e) disebut bobot ***(weight)*** dari e.

Grap bobot adalah sebuah grap yang setiap sisinya dikaitkan dengan bilangan real. Sedangkan bobot dari sebuah grap G di lambangkan dengan W(G) adalah jumlah bobot semua sisi G.



Gambar 4.4.1: Grap-bobot G dengan bobot W(G) = 50

Panjang lintasan dalam sebuah grap-bobot G adalah jumlah bobot dari semua sisi dalam lintasan tersebut. Misal u dan v adalah dua titik di grap G. Lintasan (u,v) di grap G yang panjangnya minimum disebut **lintasan terpendek** antara u dan v.

Jarak terpendek dari u ke v dinotasikan dengan $d_G(u,v)$, didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek antara titik u dan v di grap G.

Misalkan lintasan terpendek yang menghubungkan titik v_1 dan v_5 di grap G pada gambar 5.4.1 adalah lintasan (v_1, v_4, v_7, v_6, v_5) yang panjangnya = 1 + 2 +2 + 2 = 7. Dengan demikian $d(v_1 , v_5)= 7$.

Perhatikan gambar 5.4.1 di atas. Andaikan titik dalam grap tersebut mewakili kota, sisi mewakili jalan antara dua kota, dan bobot sisi mewakili panjang jalan. Misalkan kota berada di kota v_1 dan ingin bepergian ke kota v_{11}. Ada beberapa lintasan yang dapat kita lalui, misalnya lintasan P_1 = (v_1, v_2, v_5, v_9, v_{11}); P_2 = (v_1, v_3, v_6, v_9, v_{11}); P_3=(v_1, v_4, v_7, v_{10}, v_{11}) atau P_4 = (v_1, v_4, v_7, v_6, v_9, v_{11}); yang secara berturut-turut panjang lintasannya 14,15,14,13. Berdasarkan segi aplikasi diantara ke-4 lintasan tersebut, maka lintasan P_4 yang paling menguntungkan.

Permasalahan yang muncul adalah apakah ada lintasan dari kota v_1 ke kota v_{11} yang lebih pendek dari ke-4 lintasan tersebut?

Permasalahan pokok yang akan dibicarakan adalah **bagaimana cara mencari lintasan terpendek antara dua titik dalam suatu grap-bobot tertentu.**

Untuk mencari panjang lintasan terpendek dari sebuah titik s ke sebuah titik t di grap-bobot g, dimana bobot setiap sisi grap G adalah bilangan non negatif akan digunakan algoritma yang dikembangkan oleh Dijkstra (1959).

Algoritma Dijkstra

Untuk mencari panjang lintasan terpendek dari sebuah titik s ke sebuah titik t di grap bobot G. Dapat diterapkan algoritma Dijkstra sebagai berikut.

Input : Grap bobot G dengan $s,t \in V(G)$

Step 1: Label titik s dengan $\lambda(s)=0$ dan untuk setiap v di G selain s, label v dengan $\lambda(v)=\infty$ (dalam praktek ∞ diganti dengan bilangan yang ''sangat besar'').

Tulis T= V (G), T= himpunan titik yang berlabel sementara.

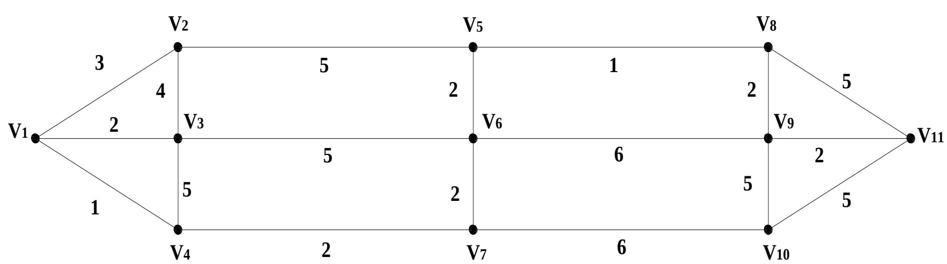
Step 2: Misalkan u $\in$ T dengan $\lambda(u)$ minimum

Step 3: Jika u= t, *Stop*; dan beri pesan : panjang lintasan terpendek dari s ke t adalah $\lambda(t)$

Step 4: $\forall$ sisi e=uv, v$\in$T; ganti label dengan $\lambda(v)$= minimum $\{\lambda(v), \lambda(u)+w(e)\}$

Step 5: Tulis T= T-$\{u\}$dan selanjutnya pergi ke step 2.

Perhatikan grap bobot G dengan bobot W(G)=50 di bawah ini.



d(v_1v_5)=7(panjang lintasan terpendek dari v_1 ke v_5)

W(v_1v_2)= 3(bobot sisi v_1 v_2)

Terapkanlah algoritma Dijkstra untuk mencari panjang lintasan terpendek dari titik v_1 ke titik v_{11} dalam grap bobot G tersebut.

Penyelesaian:

Step 1: Kita label titik v_1 dengan $\lambda(v_1)=0$ dan untuk setiap i, dengan 2 ≤ i ≤11, label v_i dengan $\lambda(v_i)=\infty$. Selanjtunya tulis T = { v_1, v_2, v_3,…,v_{11} }. Kita pandang T sebagai himpunan titik-titik di G yang belum dilabel permanen. Sehingga label dari titik-titik di G dan himpunan T dapat dilihat pada table berikut:

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
T	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}

step 2: Jelas terlihat bahwa titik di T yang mempunyai label minimum adalah v_1 . Karena u = v_1 dan u ≠ v_{11}, maka dilanjutkan ke step 4

Step 4: Terdapat 3 sisi di G yang terkait dengan v_1 yaitu: $v_1 v_2$, $v_1 v_3$, dan $v_1 v_4$, sedemikian hingga v_2, v_3, v_4 belum dilabel permanen.

Karena $\lambda(v_2) = \infty$ > 0 + 3 = $\lambda(v_1)$ + w ($v_1 v_2$), maka ganti label v_2 dengan $\lambda(v_2) = 3$.

Begitu pula, karena $\lambda(v_3) = \infty$ > 0 + 2 = $\lambda(v_1)$ + w ($v_1 v_3$), maka ganti label v_3 dengan $\lambda(v_3) = 2$.

Dengan cara yang sama, ganti label v_4 dengan $\lambda(v_4) = 1$.

Step 5: Ganti T dengan T- {v_1 }. Pada tahap ini, berarti titik v_1 telah dilabel permanen dengan label $\lambda(v_1)$= 0. Sehingga label titik di G dan himpunan T yang baru dapat dilihat pada table berikut:

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	3	2	1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
T	-	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}

Selanjutnya kembali ke step 2

Step 2: Karena v_4 adalah titik di T dengan label minimum, maka u = v_4. Karena u ≠ v_{11} , maka pergi ke step 4.

Step 4: Terdapat 2 sisi yang terkait dengan v_4 yaitu: v_4 v_3 dan v_4 v_7 sedemikan hingga v_3 dan v_7 keduanya di T. Perhatikan bahwa sisi v_4 v_1 juga terkait dengan v_4 , tetapi v_1 tidak di T.

Karena $\lambda(v_3) = 2$ < 1 + 5 = $\lambda(v_4)$ + w (v_4 v_3), maka label v_3 tetap yaitu $\lambda(v_3) = 2$.

Karena $\lambda(v_7) = \infty$ > 1 + 2 = $\lambda(v_4)$ + w (v_4 v_7), ganti label v_7 dengan $\lambda(v_7) = 3$.

Step 5: Ganti T dengan T- {v_4 }. Pada tahap ini, berarti titik v_4 telah dilabel permanen dengan label $\lambda(v_4)$= 1. Sehingga label titik di G dan himpunan T yang baru dapat dilihat pada table berikut:

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	3	2	1	∞	∞	3	∞	∞	∞	∞
T	-	v_2	v_3	-	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}

Selanjutnya kembali ke step 2

Step 2: Karena v_3 adalah titik di T dengan label minimum, maka u = v_3. Karena u ≠ v_{11} , maka pergi ke step 4.

Step 4: Terdapat 2 sisi yang terkait dengan v_3 yaitu: v_3 v_2 dan v_3 v_6 sedemikan hingga v_2 dan v_6 keduanya di T.

Karena $\lambda(v_2) = 3$ < 2 + 4 = $\lambda(v_3)$ + w (v_3 v_2), maka label v_2 tetap yaitu $\lambda(v_2) = 3$.

Karena $\lambda(v_6) = \infty$ > 2 + 5 = $\lambda(v_3)$ + w (v_3 v_6), ganti label v_6 dengan $\lambda(v_6) = 7$.

Step 5: Ganti T dengan T- {v_3 }. Pada tahap ini, berarti titik v_3 telah dilabel permanen dengan label $\lambda(v_3)$= 2. Sehingga label titik di G dan himpunan T yang baru dapat dilihat pada table berikut:

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	3	2	1	∞	7	3	∞	∞	∞	∞
T	-	v_2	-	-	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}

Selanjutnya kembali ke step 2

Step 2: Karena v_2 adalah titik di T dengan label minimum, maka u = v_2. Karena u ≠ v_{11} , maka pergi ke step 4.

Step 4: Hanya ada satu sisi yang terkait dengan v_2 yaitu: v_2 v_5 sedemikan hingga v_5 di T.

Karena $\lambda(v_5)=\infty$ > 3 + 5 = $\lambda(v_2)$ + w (v_2 v_5), ganti label v_5 dengan $\lambda(v_5)=8$.

Step 5: Ganti T dengan T- {v_2 }. Pada tahap ini, berarti titik v_2 telah dilabel permanen dengan label $\lambda(v_2)$= 3. Sehingga label titik di G dan himpunan T yang baru dapat dilihat pada table berikut:

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	3	2	1	8	7	3	∞	∞	∞	∞
T	-	-	-	-	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}

Selanjutnya kembali ke step 2

Step 2: Karena v_7 adalah titik di T dengan label minimum, maka u = v_7. Karena u ≠ v_{11} , maka pergi ke step 4.

Step 4: Terdapat 2 sisi yang terkait dengan v_7 yaitu: v_7 v_6 dan v_7 v_{10} sedemikan hingga v_6 dan v_{10} keduanya di T.

Karena $\lambda(v_6)=7$ > 3 + 2 = $\lambda(v_7)$ + w (v_7 v_6), maka ganti label v_6 dengan $\lambda(v_6)=5$.

Karena $\lambda(v_{10}) = \infty$ > 3 + 6 = $\lambda(v_7)$ + w (v_7 v_{10}), ganti label v_{10} dengan $\lambda(v_{10}) = 9$.

Step 5: Ganti T dengan T- {v_7 }. Pada tahap ini, berarti titik v_7 telah dilabel permanen dengan label $\lambda(v_7)$= 3. Sehingga label titik di G dan himpunan T yang baru dapat dilihat pada table berikut:

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	3	2	1	8	7	3	∞	∞	∞	∞
T	-	-	-	-	v_5	v_6	-	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}

Jika proses tersebut dilanjutkan dengan mengulangi proses di atas sampai titik v_{11} dilabel permanen. Jika proses tersebut dilanjutkan, maka berturut-turut akan diperoleh table-tabel sebagai berikut:

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	3	2	1	8	7	3	∞	11	9	∞
T	-	-	-	-	v_5	-	-	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	3	2	1	8	7	3	8	11	9	∞
T	-	-	-	-	-	-	-	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	3	2	1	8	7	3	8	11	9	13
T	-	-	-	-	-	-	-	-	v_9	v_{10}	v_{11}

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	3	2	1	8	7	3	8	11	9	12
T	-	-	-	-	-	-	-	-	v_9	-	v_{11}

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	3	2	1	8	7	3	8	11	9	12
T	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	v_{11}

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	3	2	1	8	7	3	8	11	9	12
T	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Dari tabel terakhir, kita lihat bahwa setiap titik v_i di G sudah dilabel permanen karena himpunan T merupakan himpunan kosong. Karena label permanen dari v_{11} adalah $\lambda(v_{11})$ = 12, jadi panjang lintasan terpendek v_1 ke v_{11} dari grap-bobot G adalah 12.

Untuk menentukan lintasan terpendek dari v_1 ke v_{11} dapat dilakukan dengan **metode telusur balik** yaitu dari v_{11} ke v_1.

Perhatikan bahwa:

$\lambda(v_{11})$ = 12 = 10 + 2 = $\lambda(v_9)$ + w (v_9 v_{11})

$\lambda(v_9)$ = 10 = 8 + 2 = $\lambda(v_8)$ + w (v_8 v_9)

$\lambda(v_8)$ = 8 = 7 + 1 = $\lambda(v_5)$ + w (v_5 v_8)

$\lambda(v_5)$ = 7 = 5 + 2 = $\lambda(v_6)$ + w (v_6 v_5)

$\lambda(v_6)$ = 5 = 3 + 2 = $\lambda(v_7)$ + w (v_7 v_6)

$\lambda(v_7)$ = 3 = 1 + 2 = $\lambda(v_4)$ + w (v_4 v_7)

$\lambda(v_4)$ = 1 = 0 + 1 = $\lambda(v_1)$ + w (v_1 v_4)

Jadi $\lambda(v_{11})$= w (v_1 v_4) + w (v_4 v_7) + w (v_7 v_6) + w (v_6 v_5) + w (v_5 v_8) + w (v_8 v_9) + w (v_9 v_{11})

Dengan demikian sebuah lintasan terpendek dengan panjang 12 dari v_1 ke v_{11} di grap-bobot G adalah lintasan: (v_1, v_4, v_7, v_6, v_5, v_8, v_9, v_{11})

Catatan

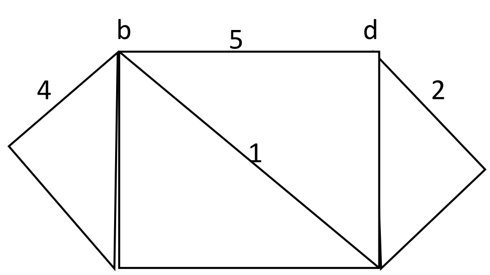
Algoritma Dijkstra, selain digunakan untuk mencari jarak dua titik tertentu dalam grap dapat pula digunakan untuk mencari jarak sebuah titik ke setiap titik lainnya dalam grap tersebut.

Misalnya dalam table terakhir, kita dapat menyatakan bahwa jarak titik v_1 ke titik-titik v_6, v_8, v_9 berturut-turut adalah 7, 8, 11.

Soal:

Gunakan Algoritma Dijkstra untuk menentukan panjang lintasan terpendek dari titik a ke setiap titik yang lain di grap-grap berikut. Tentukan pula sebuah lintasan terpendek dari a ke setiap titik lain tersebut !

a)

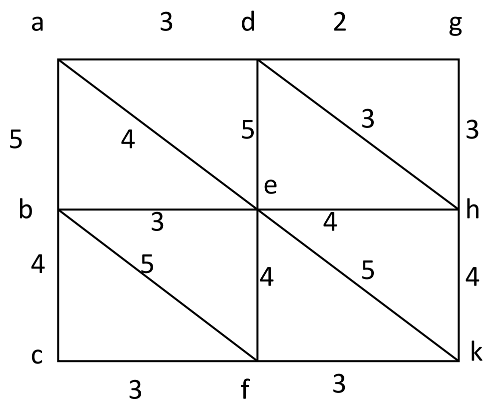


a 2 3 f

3 5

c 6 e

b)



BAB V

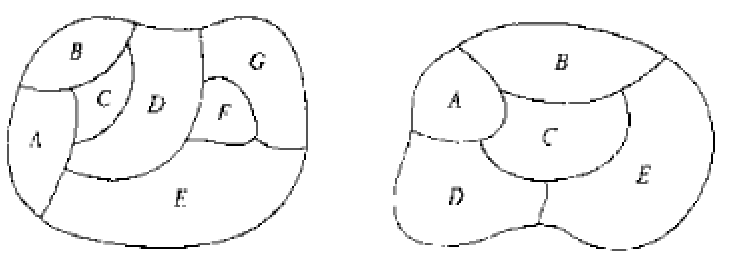
PEWARNAAN PADA GRAPH

5.1. Pengantar

Konsep-konsep yang dikaji dan diuraikan di dalam bab ini terdiri atas topik-topik yang menyangkut pewarnaan titik, pewarnaan sisi (pewarnaan peta), dan pewarnaan garis.

Permasalahan terkait dengan pewarnaan peta dari suatu daerah seperti peta dunia sudah menghasilkan banyak hasil dalam teori graph. Ketika sebuah peta (kita asumsikan bahwa semua daerah dalam peta terhubung) diwarnai, dua daerah dengan batas yang umum seperti biasa diwarnai dengan warna yang berbeda. Salah satu cara untuk memastikan bahwa dua daerah yang berbatasan tidak pernah mempunyai warna yang sama yaitu menggunakan warna yang berbeda dari tiap – tiap daerah.

Bagaimanapun, hal ini tidak efisien dan pada peta dengan banyak daerah akan sulit untuk membedakan warna yang serupa. Oleh karena itu, sejumlah kecil warna seharusnya mungkin digunakan sewaktu – waktu. Memperhatikan masalah penentuan jumlah terkecil dari warna yang dapat digunakan untuk mewarnai peta sehingga daerah yang berdekatan tidak pernah mempunyai warna yang sama. Sebagai contoh, pada peta yang ditunjukkan pada gambar 5.1 sebelah kiri, empat warna cukup tetapi tiga warna tidak cukup. Pada peta di sebelah kanan gambar 5.1, tiga warna cukup tetapi dua warna tidak cukup.



Gambar 5.1 2 Buah Peta

Masing – masing peta dalam bidang datar dapat direpresentasikan dalam sebuah graph. Untuk membentuk persesuaian tiap daerah dari peta direpresentasikan dengan sebuah verteks. Sisi – sisi menghubungkan dua titik – titik jika daerah diwakili oleh titik – titik yang mempunyai batas umum. Dua daerah yang bersentuhan hanya pada satu titik tidak dikatakan berdekatan atau berbatasan. Penggabungan graph disebut sebagai **dual graph** dari peta. Dual graph yang terbentuk jelas bahwa peta pada bidang datar mempunyai dual graph planar. Gambar 5.2 menunjukkan dual graph yang berkorespondensi terhadap peta yang ditunjukkan pada gambar 5.1.

Permasalahan dalam pewarnaan daerah pada peta ekuivalen terhadap permasalahan pewarnaan pada titik – titik dari dual graph sehingga tidak ada dua titik yang berdekatan pada graph berikut mempunyai warna yang sama.

Definisi 5.1.

Pewarnaan graf sederhana adalah pemasangan warna pada setiap titik dari graf sehingga tidak ada dua titik yang berdekatan dipasangkan dengan warna yang sama.

Sebuah graf dapat diwarnai dengan memetakan warna yang berbeda terhadap masing-masing titik. Namun, pada sebagian pewarnaan graf dapat ditemukan bahwa menggunakan warna yang lebih sedikit dari jumlah titik pada graf. Berapakah jumlah warna paling sedikit yang diperlukan?

Definisi 5.2

Bilangan kromatik dari graf adalah jumlah terkecil warna yang diperlukan untuk mewarnai graf tersebut. Bilangan kromatik dari graf G dinotasikan dengan χ (G). (Di sini χ adalah huruf Yunani chi.)

Bilangan kromatik dari graf planar sama dengan jumlah minimum warna yang dibutuhkan untuk mewarnai peta planar sehingga tidak ada dua daerah yang berdekatan yang dipetakan dengan warna yang sama. Pertanyaan ini telah dipelajari selama lebih dari 100 tahun. Jawabannya tersedia pada salah satu teorema paling terkenal dalam matematika yaitu teorema empat warna.

TEOREMA EMPAT WARNA

Bilangan kromatik dari graf planar tidak lebih dari empat.

Teorema Empat Warna awalnya diajukan sebagai dugaan pada tahun 1850an. Akhirnya dibuktikan dengan matematikawan dari Amerika Kenneth Appel dan Wolfgang Haken pada tahun 1976. Baru pada Tahun 1976 ditemukan penyelesaian masalah ini. Pada tahun tersebut Kenneth Appel dan Wolfgang Haken, dua matematikawan dari Universitas Illionis di Amerika Serikat, dapat membuktikan (dengan bantuan komputer) dugaan empat warna dengan menyita waktu sekitar 1.200 jam komputer untuk menghasilkan beratus-ratus halaman kertas hasil analisis menyeluruh terhadap sekitar 2.000 graph dengan jutaan kemungkinan bentuknya. Salah satu cara yang digunakan adalah menggunakan graph yang titiknya menunjukkan propinsi dan garis menunjukkan hubungan dua propinsi itu sebagai tetangga.

5.2. Pewarnaan Titik Suatu Graph

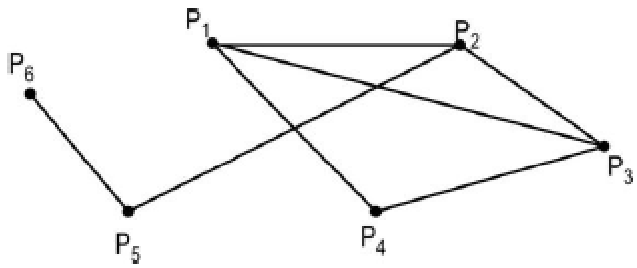
Sebelum masuk pada pewarnaan titik suatu graph perhatikan contoh berikut untuk lebih memahami pengertian tentang pewarnaan titik.

Contoh 1

Sebuah pabrik kimia ingin mengirimkan hasil produksinya dengan menggunakan kereta api. Sesuai dengan ketentuan yang ada, tidak semua zat kimia ini dapat dimuat dalam satu kereta, karena kemungkinan bercampurnya zat itu yang dapat menyebabkan terjadinya reaksi berupa ledakan yang membahayakan. Bagaimana zat-zat kimia ini dapat dikirim? Dengan maksud meminimumkan biaya, pabrik itu ingin menggunakan gerbong kereta api sesedikit mungkin. Berapa banyaknya gerbong kereta api yang diperlukan?

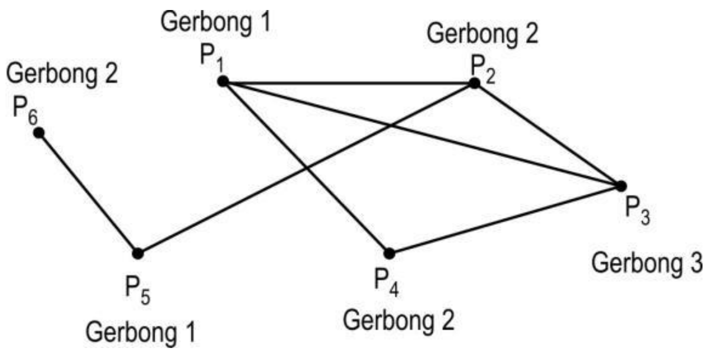
Pada Contoh di atas ada objek (hasil zat kimia) dan ada keterhubungan (tidak dapat dimuat dalam satu gerbong kereta) di antara objek itu. Karena hal ini merupakan ide dasar suatu graph, maka dapat disajikan dalam bentuk graph. Pada contoh di atas, titik-titiknya adalah zat kimia dan sisinya menghubungkan zat-zat kimia yang tidak dapat diangkut dalam gerbong kereta yang sama.

Sebagai ilustrasi, diasumsikan bahwa pada *contoh 1* ada enam zat kimia P1, P2, P3, P4, P5, dan P6. Serta P1 dengan P2, P3, atau P4 tidak dapat diangkut dalam kereta yang sama, juga P2 dengan P3 atau P5, P3 dengan P4, dan P5 dengan P6. Graph yang menyajikan hal ini dapat dilihat pada Gambar 5.2, yang titik-titiknya menunjukkan enam zat kimia dan sisinya menghubungkan pasangan zat kimia yang tidak dapat dimuat dalam gerbong kereta yang sama.



Gambar 5.2

Berapa banyak minimum gerbong kereta yang diperlukan? Dalam graph pada Gambar 5.2, zat kimia yang disajikan dengan titik berdekatan harus dimuat dalam gerbong kereta yang tidak sama. Misal: zat P1 dan P2 berdekatan, misalkan zat P1 diletakkan pada gerbong kereta 1, kereta lain diperlukan untuk memuat P2, katakan gerbong kereta 2. Karena P3 berdekatan P1 dan P2, maka diperlukan gerbong kereta lain lagi untuk P3, katakan gerbong kereta 3. Tetapi tidak diperlukan gerbong kereta lain lagi untuk P4, gerbong kereta 2 dapat digunakan lagi. Demikian pula halnya, tidak diperlukan gerbong kereta lain lagi untuk P5, karena gerbong kereta 1 atau 3 dapat digunakan lagi. Misalnya dipilih gerbong kereta 1, maka untuk P6 dipilih gerbong kereta 2 atau 3, katakan gerbong kereta 2. Graph pada Gambar 5.3 menunjukkan bagaimana titik-titik itu diberi nama (label) sehingga zat kimia yang tidak dapat berada bersama, dimuat dalam gerbong kereta berbeda. Juga karena P1, P2, dan P3 saling berdekatan, maka paling sedikit harus digunakan tiga gerbong kereta berbeda. Sehingga banyak minimum gerbong kereta yang harus digunakan ada tiga.



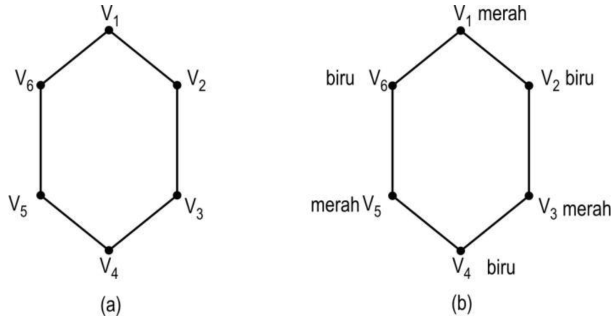
Gambar 5.3

Pemberian label pada titik-titik graph sehingga titik yang berdekatan mendapatkan label yang berbeda. Ide ini sering terjadi dalam teori graph, dan label ini disebut warna. *Mewarnai sebuah graph* berarti memberi warna pada setiap titik graph, sedemikian hingga titik yang berdekatan mendapat warna berbeda. Menanyakan banyak minimum gerbong kereta yang diperlukan pada contoh 1 adalah sama seperti menanyakan banyak minimum warna yang diperlukan untuk mewarnai graph pada Gambar 5.2, dengan warna mewakili gerbong kereta.

Bila suatu graph G dapat diwarnai minimal dengan n warna, maka G dikatakan memiliki *bilangan khromatik n*. Jadi graph G pada Gambar 5.2 memiliki bilangan khromatik 3.

Contoh 2

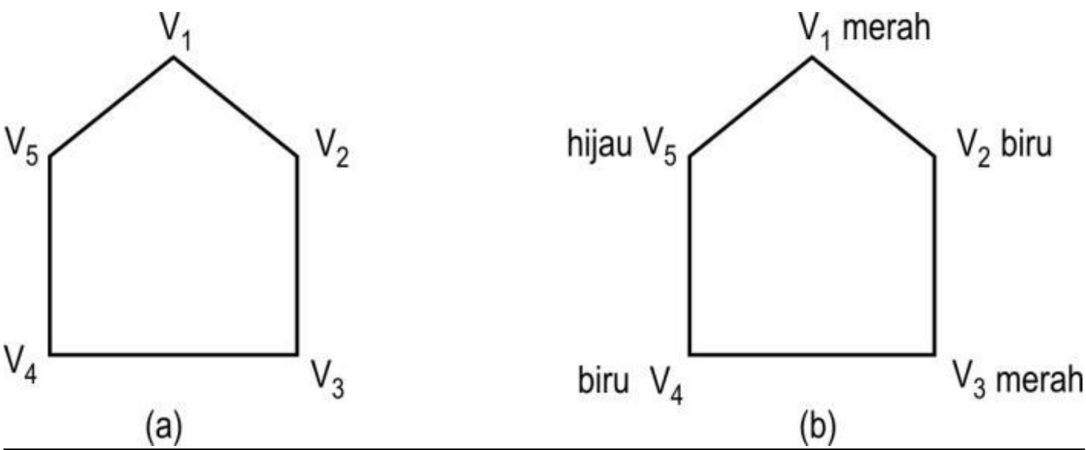
Graph pada gambar 5.4 (a) memiliki bilangan khromatik 2 karena titik V1, V3, dan V5 dapat diwarnai dengan satu warna (misalkan merah) dan tiga titik lainnya dengan warna kedua (misalkan biru), seperti yang terlihat pada Gambar 5.4 (b). Secara umum, jika suatu sikel memiliki titik yang banyaknya genap, maka sikel itu dapat diwarnai menggunakan dua warna.



Gambar 5.4

Contoh 3

Bila suatu sikel memiliki titik yang banyaknya ganjil, seperti pada Gambar 5.5 (a), maka harus digunakan tiga warna. Bila dicoba menggunakan warna itu secara berselang seperti pada Gambar 5.4, warna merah untuk titik V1 dan V3 serta warna biru tidak dapat digunakan lagi untuk V5. Penggunaan tiga warna untuk mewarna sikel yang banyak titiknya ganjil diilustrasikan pada Gambar 5.5 (b).

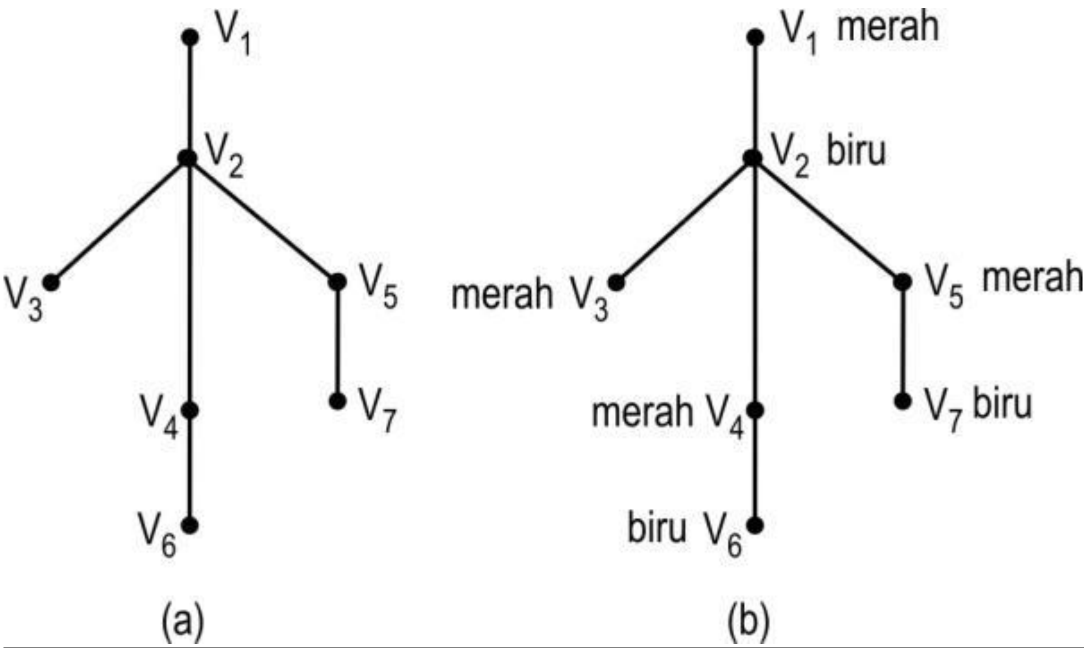


Gambar 5.5

Dalam graph lengkap Kn, setiap titik saling berdekatan dengan titik lainnya. Jadi, kurang dari n warna tidak cukup untuk mewarnai graph itu. Oleh karena itu, graph lengkap Kn memiliki bilangan khromatik n.

Contoh 4

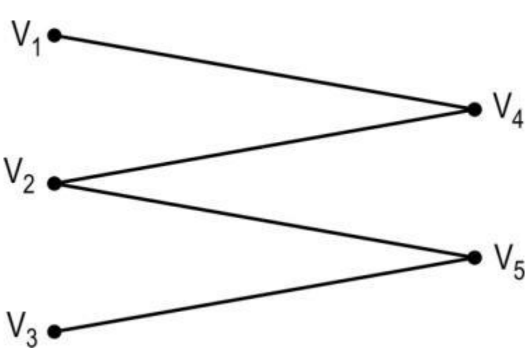
Graph pada Gambar 5.6 (a) dapat diwarnai dengan menggunakan dua warna, seperti terlihat pada Gambar 5.6 (b)



Gambar 5.6

Contoh 5

Graph pada Gambar 6.6 memiliki bilangan khromatik 2 karena titik di sebelah kiri dapat diwarnai dengan menggunakan warna pertama dan titik di sebelah kanan dapat diwarnai dengan menggunakan warna kedua.



Gambar 5.7

Secara umum, sangat sulit untuk menentukan banyak minimum warna yang diperlukan untuk mewarna graph. Salah satunya dengan mendaftar semua cara mewarna (yang berbeda) titik-titik graph, kemudian memeriksa setiap cara itu untuk menentukan mana yang menggunakan banyak warna minimum. Sayangnya, walaupun titik graph tidak seberapa banyak, dan kita menggunakan komputer super, proses ini sangat memakan waktu, bahkan sampai berabad-abad.

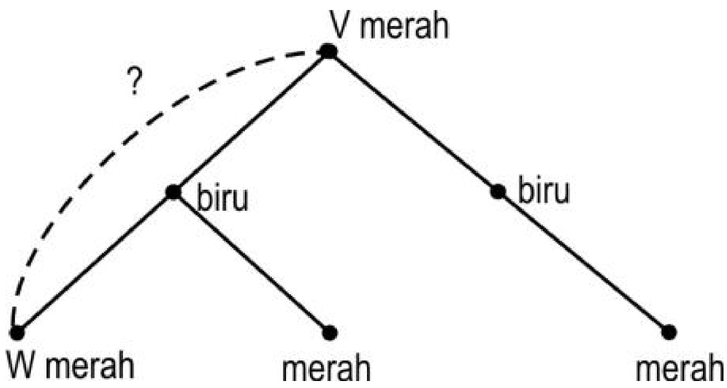
Tetapi, ada beberapa cara yang berhasil diperoleh untuk dapat menunjukkan bilangan khromatik suatu graph. Misal, seperti yang terlihat pada Contoh 3, sikel yang panjangnya ganjil memiliki bilangan khromatik 3. Jadi setiap graph yang memiliki sikel jenis ini membutuhkan minimum 3 warna. Graph pada Gambar 5.5 merupakan salah satu contohnya. Bila sikel pada suatu graph panjangnya genap, maka 2 warna sudah cukup.

Teorema 1

Suatu graph G tidak memiliki sikel yang panjangnya ganjil, jika dan hanya jika G dapat diwarnai dengan 2 warna.

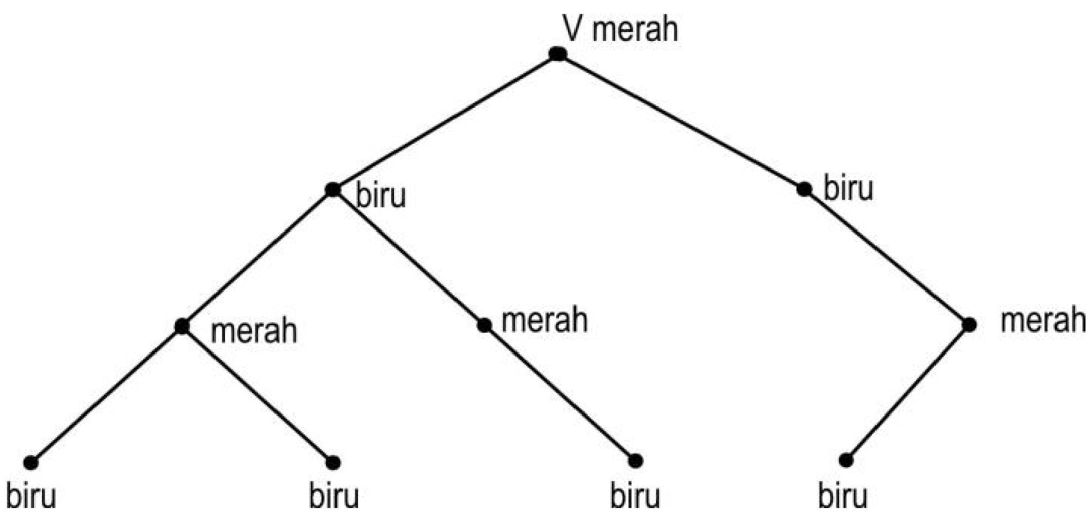
Bukti

Seperti uraian di atas, bila G memiliki sikel yang panjangnya ganjil, maka pewarna G membutuhkan paling sedikit 3 warna. Sekarang andaikan G tidak memiliki sikel yang panjangnya ganjil. Pilih suatu titik V yang diberi warna merah. Kemudian pada setiap titik yang berdekatan dengan V diberi warna biru. Sekarang, pada titik-titik yang berdekatan dengan titik yang baru diberi warna biru itu, diberi warna merah. Dapatkah salah satu dari titik yang berwarna merah ini, katakan titik W, berdekatan dengan titik V yang juga berwarna merah? Diagram pada Gambar 5.8 mengilustrasikan situasi ini.



Gambar 5.8

Terlihat bahwa jika V dan W berdekatan, maka akan ada sikel yang panjangnya 3. Dengan demikian, setiap titik lain yang baru saja diwarnai warna merah tidak berdekatan dengan titik yang berwarna merah, karena jika tidak demikian berarti ada sikel yang panjangnya ganjil. Berikutnya, titik yang berdekatan dengan yang baru saja diwarnai warna merah diberi warna biru. Hal ini diperlihatkan pada Gambar 5.9.



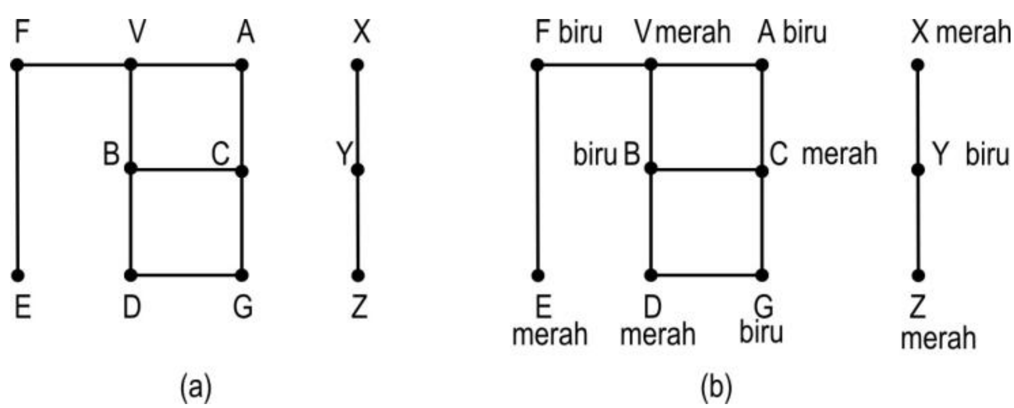
Gambar 5.9

Kemudian, jika dua titik yang diwarnai biru terletak berdekatan, maka ada sikel yang panjangnya ganjil. Kemudian dilanjutkan dengan mewarnai merah titik yang berdekatan dengan titik yang baru diwarnai biru. Seperti sebelumnya, tidak ada titik yang baru diwarnai merah dapat terletak berdekatan dengan titik yang telah berwarna merah. Proses ini diulangi sampai tidak ada titik yang belum mendapat warna terletak berdekatan dengan titik yang telah diwarnai.

Jika graphnya tidak terhubung, maka akan ada titik yang tidak berdekatan dengan titik yang telah berwarna, sehingga belum mendapat warna. Untuk titik-titik seperti itu, proses di atas diulang lagi dengan menggunakan warna merah dan biru. Akhirnya semua titik dapat diwarnai dengan warna merah dan biru.

Contoh 6

Pada graph dalam Gambar 5.10 (a), proses pewarnaan di atas dimulai dengan memilih titik V dan mewarnainya dengan warna merah. Karena F, B, dan A terletak berdekatan dengan V, maka warna biru diberikan pada titik itu. Titik yang belum mendapat warna dan terletak berdekatan dengan titik biru itu adalah C, D, dan E, sehingga diberi warna merah. Akhirnya, titik G adalah titik yang belum diwarnai dan terletak berdekatan dengan titik merah, sehingga diwarnai biru. Sekarang, X adalah titik belum diwarnai yang terletak tidak berdekatan dengan titik yang berwarna, sehingga X diberi warna merah. Kemudian Y diberi warna biru, serta akhirnya Z diberi warna merah. Lihat Gambar 5.10 (b).



Gambar 5.10

Teorema berikut ini memberikan batas atas pada banyak warna yang diperlukan untuk mewarna sebuah graph.

Teorema 2

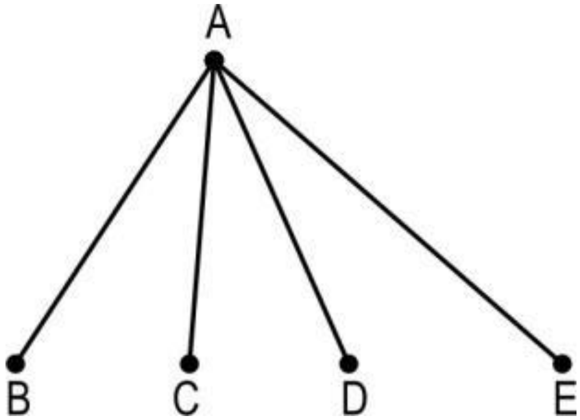
Bilangan khromatik dari graph G tidak dapat lebih satu dari derajat maksimum titik-titik dari G.

Bukti

Misalkan k adalah derajat maksimum titik dari G. Akan ditunjukkan bahwa G dapat diwarnai dengan menggunakan k+1 warna C0, ..., Ck. Mula-mula titik V dipilih dan diberi warna C0. Kemudian, beberapa titik W lain dipilih. Karena paling banyak ada k titik yang berdekatan dengan W dan ada paling sedikit k + 1 warna yang tersedia, maka paling sedikit ada satu warna (dapat lebih banyak) yang belum digunakan untuk mewarnai titik yang berdekatan dengan W. Pilih warna itu. Proses ini dapat dilanjutkan sampai semua titik dari G mendapat warna.

Contoh 7

Proses yang digambarkan pada teorema 2 dapat menggunakan lebih banyak warna daripada yang sebenarnya diperlukan. Graph pada Gambar 6.10 memiliki titik berderajat 4, yang merupakan derajat maksimumnya, sehingga dengan teorema 2 di atas, graph itu dapat diwarnai dengan menggunakan 4 + 1 = 5 warna. Tetapi, dengan menggunakan prosedur yang digambarkan pada teorema 1, graph itu dapat diwarnai dengan menggunakan 2 warna.



Gambar 5.11

Berikut ini akan diuraikan algoritma tambahan, yang ditemukan Welsh dan Powell, untuk pewarnaan titik-titik dari suatu graph.

Algoritma Welsh dan Powell

Algoritma ini memberikan cara mewarnai sebuah graph dengan memberi label titik-titiknya sesuai dengan derajatnya.

Langkah 1 (melabel titik dengan derajatnya).

Label titik V1, V2, ..., Vn sedemikian hingga derajat (V1) > derajat (V2) > ... > derajat (Vn).

Langkah 2 (warnai titik yang belum berwarna, pertama dari titik-titik belum berwarna yang berdekatan dengan titik itu).

Berikan warna yang belum digunakan pada titik belum berwarna yang pertama pada daftar titik itu. Lakukan hal itu pada semua titik dalam daftar secara terurut, berikan warna baru ini pada setiap titik yang tidak berdekatan dengan setiap titik lain yang telah diwarnai ini.

Langkah 3 (apakah graphnya telah diwarnai?).

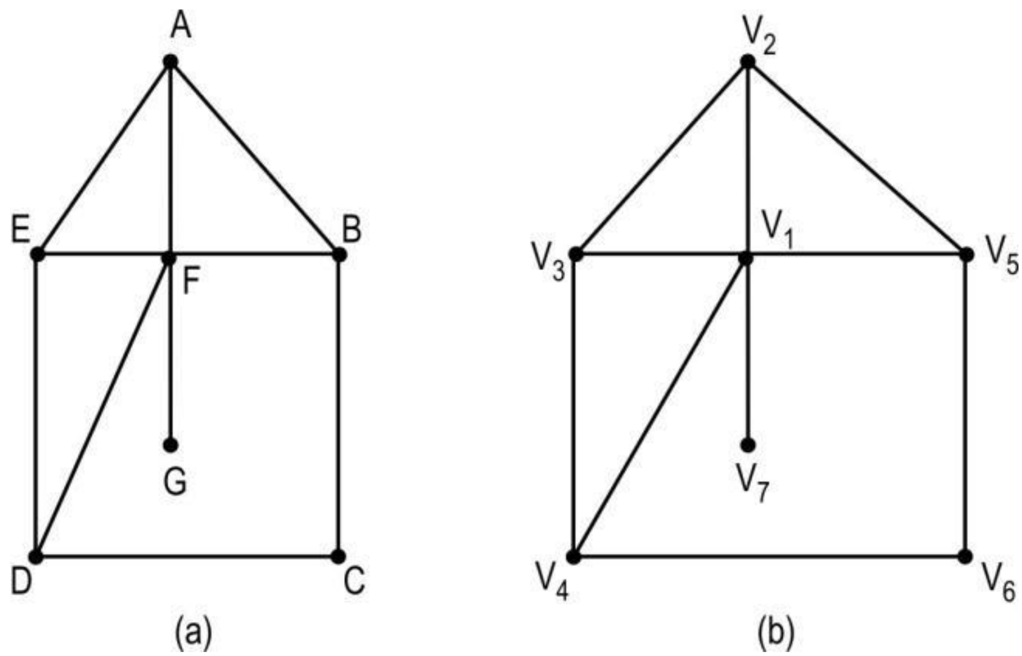
Jika beberapa titiknya belum berwarna, maka kembalilah ke langkah 2.

Langkah 4 (selesai).

Pewarnaan graph telah dilakukan.

Contoh 8

Untuk graph pada Gambar 5.12 (a), titik F memiliki derajat terbesar, yaitu 5 sehingga F diberi label V1. Titik A, D, dan E berderajat 3 sehingga diberi label V2, V3, dan V4 secara random. Demikian pula titik B dan C berturut-turut berderajat 3 dan 2 diberi label V5 dan V6. Titik G yang merupakan satu-satunya titik yang tersisa, diberi label V7. Hal ini diperlihatkan pada Gambar 5.12 (b).



Gambar 5.12

Penyajian dalam bentuk daftar berdekatan sangat mudah digunakan dengan algoritma Welsh dan Powell ini. Untuk graph pada Gambar 5.12 (b), penyajian daftar berdekatannya adalah sebagai berikut.

V1 : V2, V3, V4, V5, V7
V2 : V1, V3, V5
V3 : V1, V2, V4
V4 : V1, V3, V6
V5 : V1, V2, V6
V6 : V4, V5
V7 : V1

Pada Algoritma Welsh dan Powell ini, titik belum berwarna pertama dalam daftar adalah V1 yang diberi warna merah. Kemudian dicari titik berikut yang tidak berdekatan dengan V1 pada daftar, yaitu titik di bawah V1 yang tidak mengikuti V1. Diperoleh titik V6, yang diberi warna merah. Dilanjutkan dengan melihat bagian bahwa daftar untuk mencari titik berikutnya yang tidak berdekatan dengan V1 maupun V6. Karena titik seperti itu tidak ada, maka kembali dilihat bagian atas daftar dan ditentukan lagi titik belum berwarna yang pertama, yaitu V2, yang diberi warna biru. Kemudian, titik belum berwarna berikutnya ditentukan yang tidak berdekatan dengan V2. Diperoleh titik V4 dan diberi warna biru. Cara ini dilanjutkan lagi, dan diperoleh titik V7 yang belum berwarna dan tidak berdekatan dengan V2 maupun V4, sehingga V7 diwarnai biru, bagian atas daftar dilihat kembali dan ditentukan titik belum berwarna berikutnya, yaitu V3, yang diberi warna hijau. Karena V5 belum diwarnai dan tidak berdekatan dengan V3, yang diberi warna hijau. Dengan demikian maka graph pada Gambar 5.12 (b) dapat diwarnai dengan tiga warna.

Penyajian daftar berdekatan membuat algoritma Welsh dan Powell mudah digunakan, karena titiknya dapat ditandai ketika diwarnai, sehingga tinggal memperhatikan titik belum berwarna sisanya dalam proses perwarnaan itu.

LATIHAN

1. Perhatikan tabel 1 matriks siswa dan bidang studi berikut ini.

Tabel 1

Matriks Siswa dan Bidang Studi

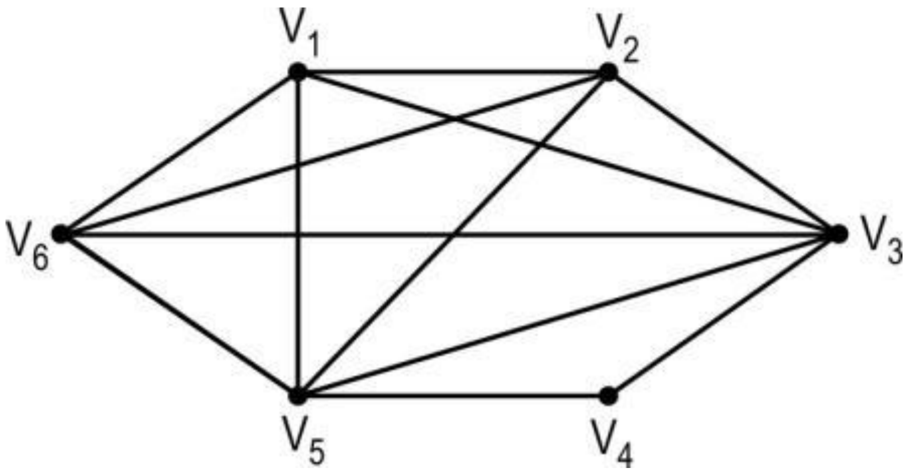
	A	**B**	**C**	**D**	**E**
1	0	1	0	0	1
2	0	1	0	1	0
3	0	0	1	1	0
4	1	1	0	0	0

5	0	1	0	1	0
6	0	1	0	0	0
7	1	0	1	0	0
8	0	0	1	1	0

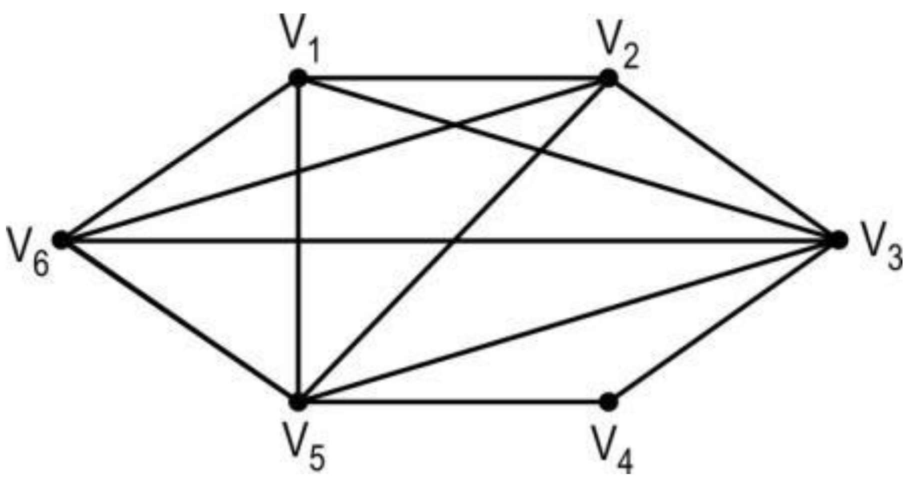
Tabel 1 menunjukkan matriks tentang lima bidang studi (di label dengan abjad) yang dipilih oleh delapan orang siswa (di label dengan angka). Angka 1 diisikan sebagai elemen (i,j) matriks itu, jika siswa i memilih bidang studi j. Sedangkan angka 0 diisikan sebagai elemen (i,j), jika siswa i tidak memilih bidang studi j. Contoh: siswa 1 memilih bidang studi B dan E karena elemen (1,B) dan (1,E) adalah 1.

Berdasarkan Tabel 1, tentukan banyak jadwal ujian yang dapat dibuat sedemikian rupa sehingga semua siswa dapat mengikuti ujian bidang studi itu tanpa ada kesulitan waktu (kesulitan terjadi jika ada siswa yang harus mengikuti ujian dua bidang studi atau lebih pada waktu yang bersamaan).

2. Berapa bilangan khromatik graph berikut?



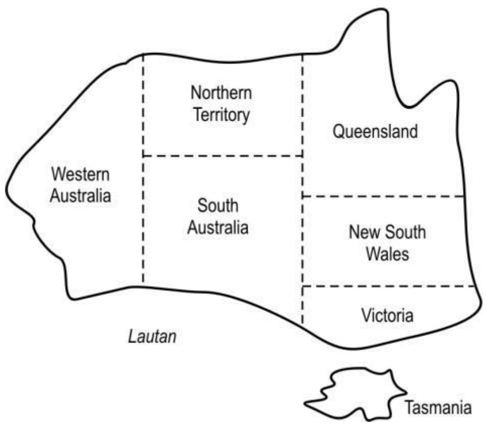
3. Berapa bilangan khromatik graph berikut?



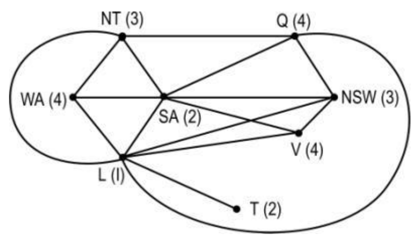
5.3. Pewarnaan Peta

Sebuah peta akan sangat mudah dipahami kalau masing-masing daerah yang saling berbatasan mempunyai warna yang berlainan. Suatu masalah yang menarik ialah menentukan banyaknya minimum warna yang harus disediakan agar tujuan tersebut terwujud. Misalnya untuk mewarnai peta negara tetangga kita Australia seperti diperlihatkan pada Gambar 5.13. Pewarnaan peta sama dengan pewarnaan titik-titik graph dari gambar peta tersebut sedemikian hingga tidak ada dua titik berdekatan yang mendapat warna sama.

Dalam hal ini negara-negara bagiannya dan lautan yang mengelilinginya diwakili oleh titik-titik. Selanjutnya pasangan titik yang mewakili daerah-daerah yang saling berbatasan dihubungkan dengan sebuah sisi, sehingga model graphnya seperti tampak pada Gambar 5.14. Oleh karena itu derajat suatu titik mencerminkan banyaknya perbatasan yang mengelilingi daerah yang diwakili titik itu. Jadi rumusan persoalan graphnya ialah mewarnai semua titik graph sedemikian hingga titik-titik yang terhubung oleh sisi mempunyai warna berbeda satu sama lain.



Gambar 5.13



Gambar 5.14

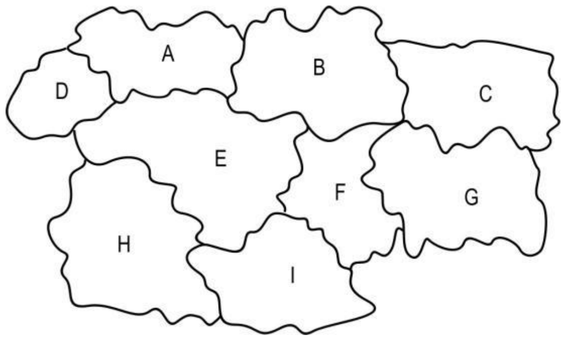
Jadi dapat disimpulkan bahwa langkah-langkah yang dilakukan dalam pemodelan dengan graph ialah menentukan:

1. Objek apa yang akan dikonversikan sebagai titik graph?
2. Hubungan apa yang dicerminkan oleh sisi graph? Pasangan titik apa saja yang harus dihubungkan oleh sisi?
3. Merumuskan masalah nyata dalam bahasa teori graph.

Angka-angka pada Gambar 5.14 menyatakan kemungkinan penempatan warna, dan masih ada pula kemungkinan penempatannya yang lain. Dari graph tersebut tampak bahwa dengan empat macam warna kita telah mampu membuat peta Australia sedemikian hingga dua negara bagian yang saling berbatasan dapat dibedakan dengan jelas.

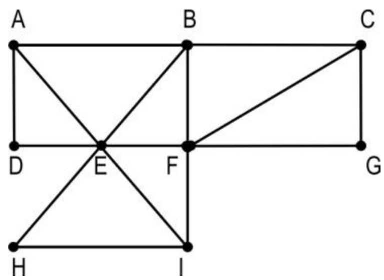
Contoh 9

Warnai peta pada Gambar 5.15, kemudian tentukan bilangan khromatiknya.



Jawab

Peta pada Gambar 5.15, dapat dilukiskan bentuk graphnya seperti pada Gambar 5.16 berikut ini.



Gambar 5.16

1. Pengurutan derajat titik

Titik	E	F	B	A	C	I	D	G	H
Derajat Titik	**6**	5	4	3	3	3	2	2	2

2. Pewarnaan titik

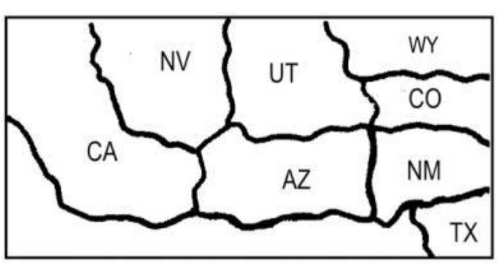
Pertama tandailah titik E dengan angka 1. Telusuri daftar titik tadi dan amati gambar graphnya, ternyata titik C adalah titik pertama yang tidak berdekatan dengan E. Kembali ke daftar titik, tandai titik F dengan angka 2, dan juga titik A dan H, karena tidak berdekatan dengan F. Penelusuran ketiga kalinya terhadap daftar titik akan menandai titik B dengan angka 3, lalu tandai pula titik I, D, dan G dengan angka 3. Dengan demikian bilangan khromatik graph tersebut adalah 3. Langkah-langkah tersebut dirangkum dalam bentuk tabel berikut.

Setiap graph G memiliki sebuah subgraph dari derajat minimum sedikitnya $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + m\sqrt{2} + \frac{1}{4}$.

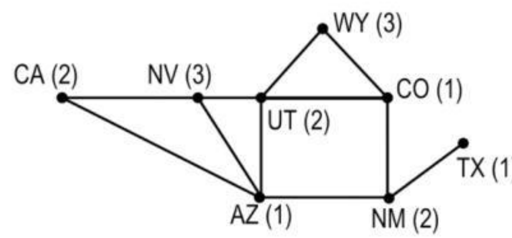
Titik	Warna		
	Tahap 1	Tahap 2	Tahap 3
E	1		
F		2	
B			3
A		2	
C	1		
I			3
D			3
G			3
H		2	

Contoh 10

Gambar 5.17 (a) merupakan bagian dari peta Amerika Serikat. Graphnya beserta warna (label) diperlihatkan pada Gambar 5.17(b) dengan menggunakan algoritma Welsh dan Powell.



(a)



(b)

Gambar

6.16 (a) **Gambar 6.16 (b)**

Berikut ini tabel yang menunjukkan hubungan antara titik, derajat titik dan warna.

Titik	AZ	UT	NV	CO	NM	CA	WY	TX
Derajat Titik	4	4	3	3	3	2	2	1
Warna	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(2)	(3)	(1)

Peta pada Gambar 5.17 (a) dapat diwarnai dengan 3 warna.

5.4. Pewarnaan garis

Pewarnaan garis atau rusuk pada suatu graph adalah penentuan warna rusuk-rusuk suatu graph sehingga setiap rusuk yang berdekatan mendapatkan warna yang berbeda. Ukuran keberwarnaan suatu graph didefinisikan sama dengan ukuran keberwarnaan titik, yaitu mengacu kepada banyaknya warna yang memungkinkan sehingga setiap rusuk yang berdekatan mendapat warna yang berbeda.

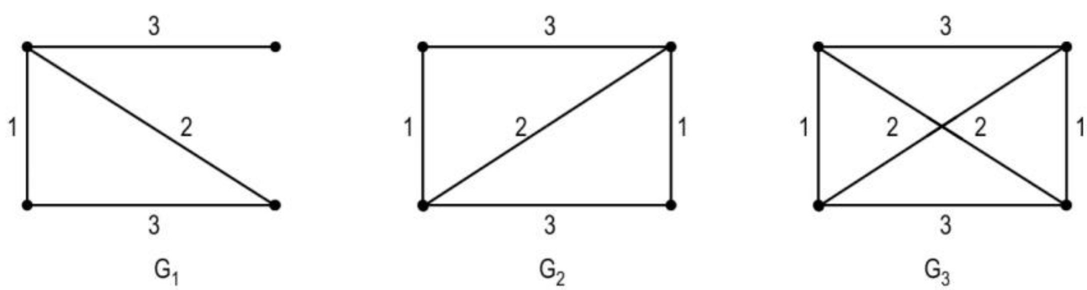
Jumlah warna minimal yang dapat digunakan untuk mewarnai rusuk-rusuk dalam suatu graph G disebut bilangan khromatik G.

Teorema 3

Jika G adalah graph sederhana yang derajat maksimum titiknya adalah m, maka bilangan khromatiknya (G) adalah

m < (G) < m+1

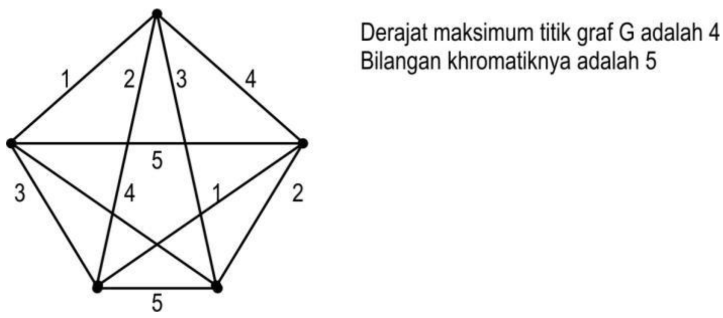
Contoh 11



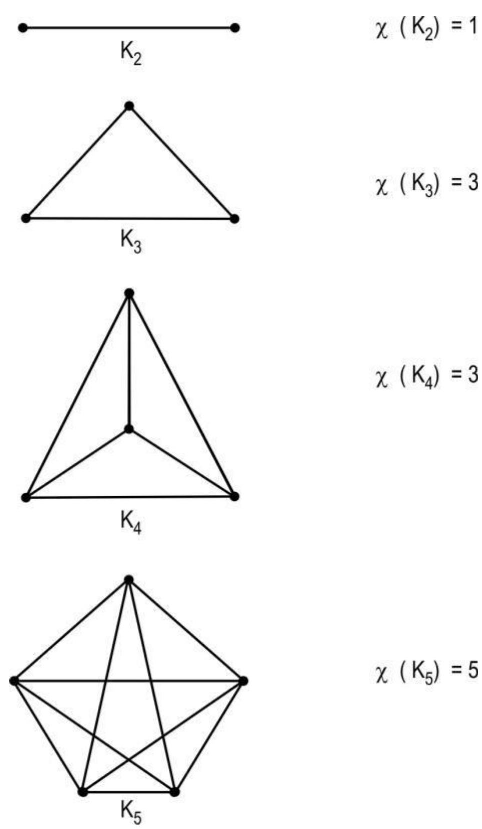
Derajat maksimum titik dari graph G1, G2, dan G3 adalah 3.

Bilangan khromatiknya adalah 3.

Contoh 12



Untuk graph lengkap Kn mempunyai sifat khusus mengenai bilangan khromatiknya. Perhatikan beberapa contoh graph lengkap berikut ini.



Hubungan antara banyaknya titik graph lengkap dan bilangan khromatik untuk graph itu dapat dirumuskan dalam teorema berikut ini.

Teorema 4

$\chi(K_n) = n$, jika n ganjil dan $n > 1$

$\chi(K_n) = n-1$, jika n genap

Contoh 13

$\chi(K_5) = 5$; $\chi(K_6) = 5$; $\chi(K_7)$; $\chi(K_8) = 7$.

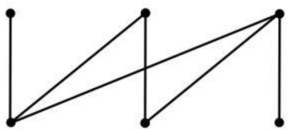
Teorema 5

Jika G adalah graph sederhana bipartit yang derajat maksimum titiknya adalah m, maka $\chi(G) = m$.

Contoh 14

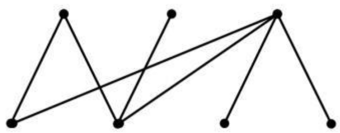
G_1

$\chi\ (G_1)\ = 2$



G_2

$\chi\ (G_2)\ = 3$



G_3

$\chi\ (G_3)\ = 4$

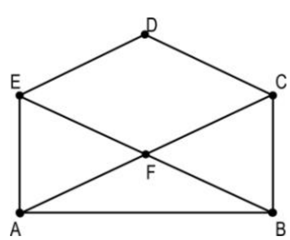
Berdasarkan teorema 3, dapat disimpulkan bahwa (Kp,t) = max (p,t). Kp,t adalah lambang untuk graph bipartit lengkap yang himpunan titiknya terpisah menjadi himpunan pertama terdiri atas p titik dan himpunan kedua terdiri atas t titik. Tanda max (p,t) menyatakan yang terbesar di antara p dan t.

LATIHAN

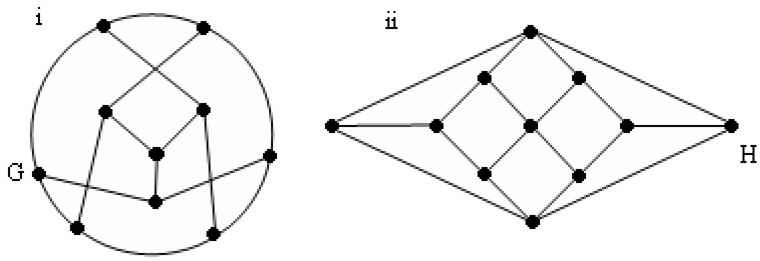
1. Sekolah "Harapan Bangsa" merencanakan seminar pendidikan matematika bagi anak-anak. Ada enam pembicara tampil dalam kesempatan yang berbeda, kegiatan tersebut akan memakan waktu terlalu lama. Akan tetapi juga tidak diharapkan pembicara-pembicara tertentu tampil pada saat yang bersamaan. Pimpinan sekolah menghendaki seminar ini berlangsung tidak lebih dari empat babak. Bagaimanakah kegiatan ini dijadwalkan jika pembicara-pembicara yang sebaiknya tidak tampil pada saat yang bersamaan ditandai dengan "*" pada tabel berikut.

Nama Pembicara	A	B	C	D	E	F
A		*	*			
B			*		*	*
C					*	*
D						
E						*

2. Berilah warna pada garis (rusuk) graph berikut, kemudian tentukan bilangan khromatiknya.



3. Tentukan bilangan khromatik dari graf berikut.



DAFTAR PUSTAKA

Budayasa Ketut, 2009. *Matematika Diskrit.* Unesa Pres: Surabaya.

Kolman, Bernard and Robert C. Busby. 2008. *Disrcete Mathematical Structures for Computer Science.* Prentice Hill, Inc: Englewood, New Jersey.

Liu, C.L. 1985. *Element of Discrete Mathematics.* McGraw-Hill Book Company: New York.

Priana, Nanang. 2012. *Pewarnaan Graph.* (Modul 6). File UPI: Bandung.

Rosen, Kenneth H. 2007. *Discrete Mathematics and Its Application Sixth Edition.* McGraw Hill: Singapore

Trembley, J.P and R. Manohar. 1988. *Discrete Mathematics Structure With Applications.* McGraw-Hill Books Company: New York.

Witala, Stephen A. 2007. *Discrete Mathematics A United Approach.* McGraw-Hill Books Com[pany: New York.